

付録4

行列式の性質

行列式はさまざまな性質を有しています。この付録では7つの性質を紹介します。

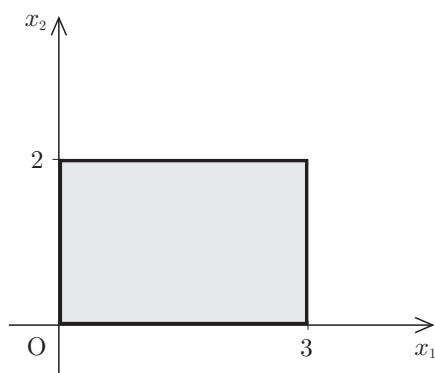
性質 1

「任意の n 次正方行列の行列式」と「その転置行列の行列式」は等しい。

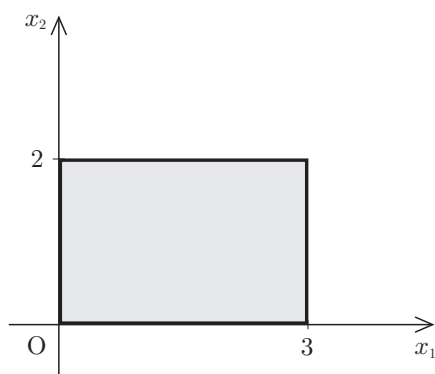
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det {}^t \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



$$\cdot \det {}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



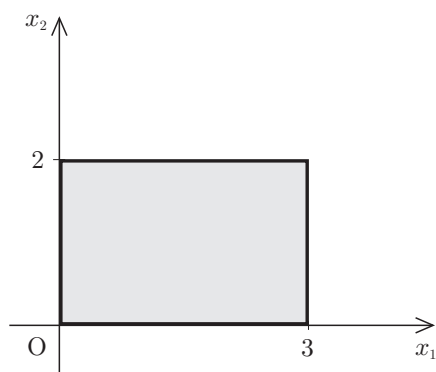
性質 2

「任意の n 次正方行列の行列式」と「その正方行列のどこか2列を入れ替えた行列の行列式を (-1) 倍したもの」は等しい。

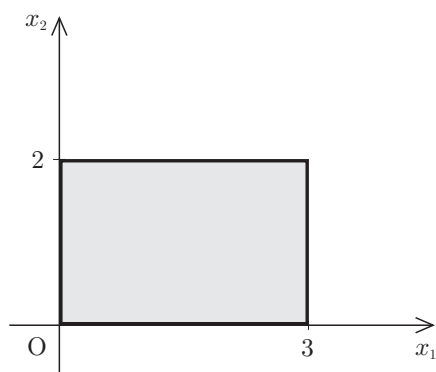
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



$$\cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \times (-6) = 6$$



性質 3

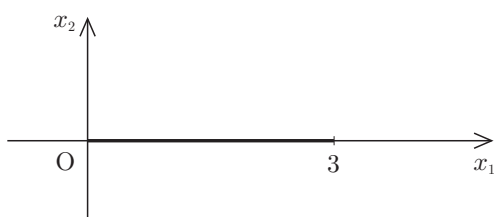
「任意の2列が等しい n 次正方行列の行列式」は、0である。

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$\uparrow$
 i 列目
 $\uparrow$
 j 列目

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{3} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix} = 0$$



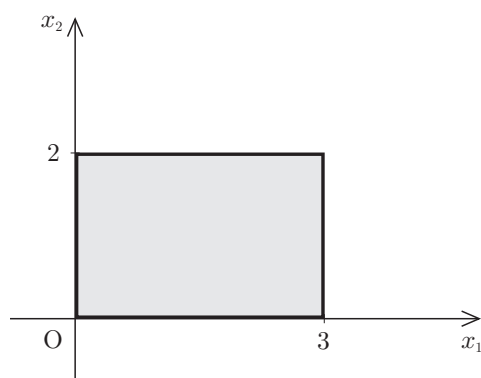
性質 4

「任意の n 次正方行列の行列式」と「その正方行列のどこか 1 列を c 倍した行列の行列式を $\frac{1}{c}$ 倍したもの」は等しい。

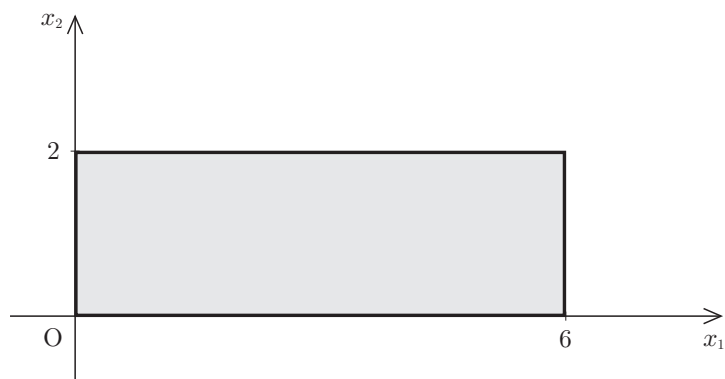
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \times c & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} \times c & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



$$\cdot \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 0 \\ 0 \times 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$



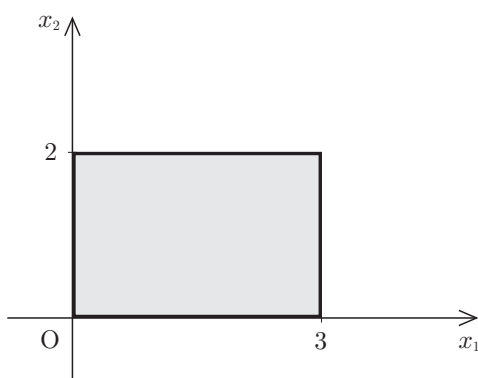
性質 5

「任意の n 次正方行列の行列式」と「その正方行列のどこか1列を分離した2つの行列の行列式の和」は等しい。

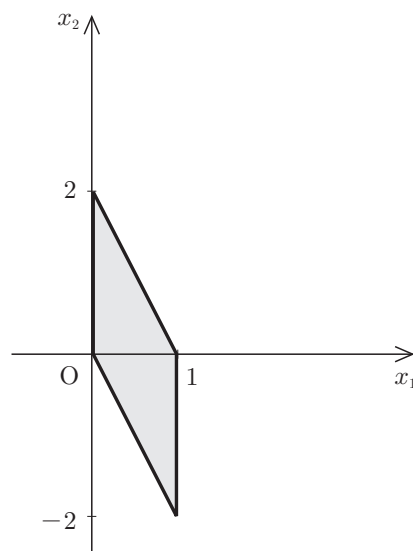
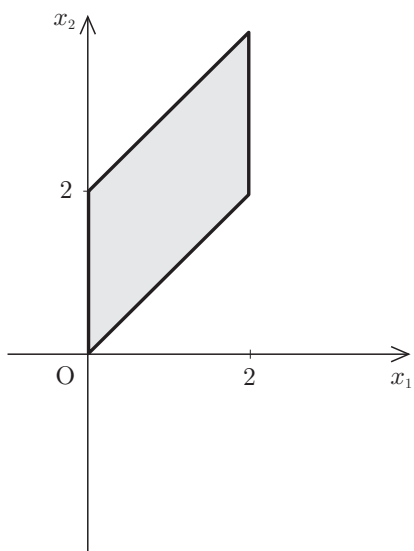
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & -b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & -b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3+(-1) & 0 \\ 0+2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -(-1) & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 2 = 6$$



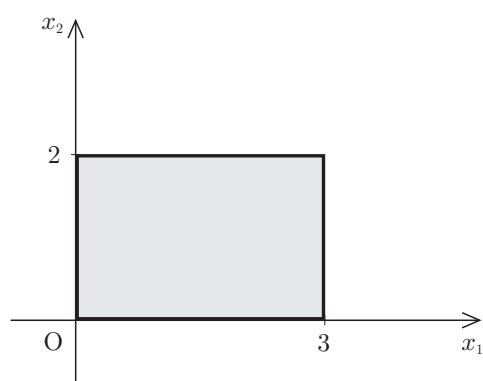
性質 6

「任意の n 次正方行列の行列式」と「その正方行列のどこか 1 列を c 倍して別の列に加えた行列の行列式」は等しい。

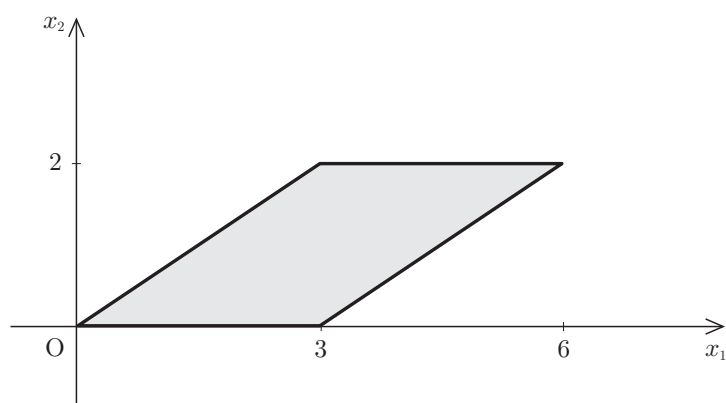
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + (a_{1i} \times c) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + (a_{ni} \times c) & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 + (3 \times 1) \\ 0 & 2 + (0 \times 1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6$$



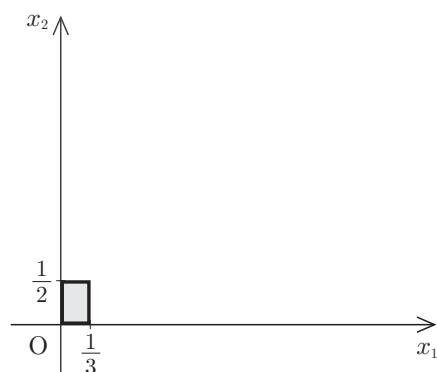
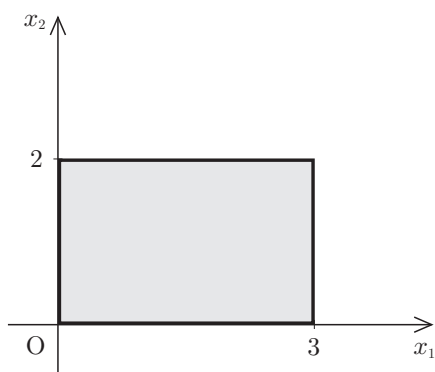
性質 7

「任意の n 次正方行列の行列式の積」と「任意の n 次正方行列の積の行列式」は等しい。

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right]$$

例

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 6 \times \frac{1}{6} = 1$$



$$\cdot \det \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

