

OHM 大学テキスト

制御工学

演習問題 解答

第1版第3刷 2-5章 テキスト未掲載分

平成27年10月7日

2章

- 【1】 $n = 1, 2$ については本文中で示されている. $k \geq 1$ とし, $n = k$ で式 (2・11) が成り立つと仮定すると $\mathcal{L}[t^k] = k!/s^{k+1}$ である. $n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^{k+1}] &= \int_0^\infty t^{k+1} e^{-st} dt = \int_0^\infty t^{k+1} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \right\} dt \\ &= \left[t^{k+1} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty + \int_0^\infty (k+1)t^k \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= \frac{k+1}{s} \mathcal{L}[t^k] = \frac{k+1}{s} \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}\end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ でも式 (2・11) が成り立つことがわかる. よって帰納的に, $n = 1, 2, 3, \dots$ について式 (2・11) が成り立つことが証明された.

- 【2】 式 (2・15) の線形性と表 2・1 を適切に利用する.

$$(1) \mathcal{L}[e^{-5t}(1+2t)] \underset{\text{式 (2・15)}}{=} \mathcal{L}[e^{-5t}] + 2\mathcal{L}[te^{-5t}] \underset{\text{表 2・1}}{=} \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+5)^2}$$

$$(2) \mathcal{L}[\sin(\alpha t + \beta)] = \mathcal{L}[\sin \alpha t \cos \beta + \cos \alpha t \sin \beta] \\ \underset{\text{式 (2・15)}}{=} \cos \beta \mathcal{L}[\sin(\alpha t)] + \sin \beta \mathcal{L}[\cos(\alpha t)] \underset{\text{表 2・1}}{=} \frac{\alpha \cos \beta + s \sin \beta}{s^2 + \alpha^2}$$

$$(3) \mathcal{L}[(1+t)(1+2t)] = \mathcal{L}[1+3t+2t^2] \underset{\text{式 (2・15)}}{=} \mathcal{L}[1] + 3\mathcal{L}[t] + 2\mathcal{L}[t^2] \underset{\text{表 2・1}}{=} \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s^3}$$

$$(4) \mathcal{L}[e^{-t}(\cos t + 3)] \underset{\text{式 (2・15)}}{=} \mathcal{L}[e^{-t} \cos t] + 3\mathcal{L}[e^{-t}] \underset{\text{表 2・1}}{=} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{3}{s+1}$$

注: デルタ関数に関わらない場合は, $t \geq 0$ を前提としてよい. これより $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u_s(t)]$.

- 【3】 表 2・1 を前問とは逆方向に利用. 部分分数展開や式 (2・26) の線形性も適切に利用する.

$$(1) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s^2 + 2s + 10} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} \right] = e^{-t} \sin 3t$$

$$(2) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2} \right] = -e^{-2t} + e^{-3t} + 2te^{-3t}$$

【4】 式(2・18)を利用する. $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ と記す. (1) $x(0-) = 2, \dot{x}(0-) = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[4 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right] \\ = 4\{s^2 X(s) - sx(0-) - \dot{x}(0-)\} + 4\{sX(s) - x(0-)\} + X(s) \\ = (4s^2 + 4s + 1)X(s) - 8s - 12 \end{aligned}$$

$$\text{これが } \mathcal{L}[3] = 3/s \text{ に等しいから } X(s) = \frac{8s^2 + 12s + 3}{s(4s^2 + 4s + 1)} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2}.$$

よって $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 3 - e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{t}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \ (t \geq 0)$. (2) $a \neq 0$ とし, 初期条件 $x(0-) = x_0$ に対する $t \geq 0$ における解を示す. 与式の両辺をラプラス変換すると $a\{sX(s) - x_0\} + X(s) = 1 \quad \therefore X(s) = \frac{ax_0 + 1}{as + 1} = \frac{x_0 + \frac{1}{a}}{s + \frac{1}{a}}$. 逆ラプラス変換して $x(t) = (x_0 + \frac{1}{a})e^{-\frac{t}{a}}$.

【5】 MATLABで次を実行すると $r = p = [4 \ 3 \ 2 \ 1]^T, k = []$ となる.

```
>> num = [10 -70 150 -96]
>> den = [1 -10 35 -50 24]
>> [r,p,k]=residue(num, den)
```

これより, 問題の伝達関数は $\frac{4}{s-4} + \frac{3}{s-3} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-1}$ と部分分数展開されることがわかる.

3章

【1】 $i(0-) = 0, v_o(0-) = 0$ として, $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t), C\frac{dv_o(t)}{dt} = i(t)$ である.

これらをラプラス変換すると $RI(s) + LsI(s) + V_o(s) = V_i(s), CsV_o(s) = I(s)$ を得る.

$$I(s) \text{ を消去して整理すると } \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

【2】 運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= k_u(u(t) - x_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) + c(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= k(x_1(t) - x_2(t)) + c(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) \end{aligned}$$

となる. ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} m_1 s^2 X_1(s) &= k_u(U(s) - X_1(s)) + k(X_2(s) - X_1(s)) + c(sX_2(s) - sX_1(s)) \\ m_2 s^2 X_2(s) &= k(X_1(s) - X_2(s)) + c(sX_1(s) - sX_2(s)) \end{aligned}$$

$X_1(s)$ を消去して整理すると

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{k_u(cs + k)}{(m_1 s^2 + cs + k + k_u)(m_2 s^2 + cs + k) - (cs + k)^2}$$

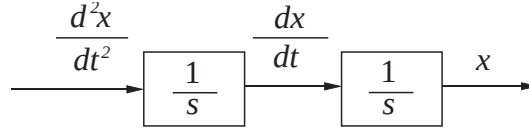


Fig. 1: 2階微分に関するブロック線図

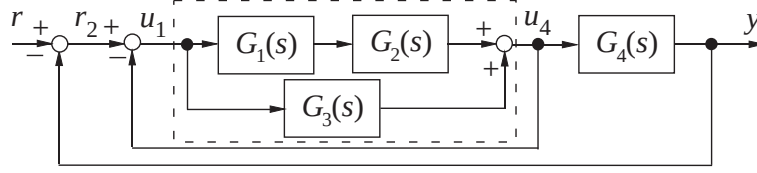


Fig. 2: 図3・16 (追記)

【3】 $x(t)$ の2階の微分方程式には, $x(t)$ に加えて $dx(t)/dt$, $d^2x(t)/dt^2$ が現れる. これらの関係は Fig.1 のように積分器を用いて表すことができる. 式 (3・11) の左辺では $d^2x(t)/dt^2$ に m が掛かっているので, それに応じて左側の積分器のブロックを $\frac{1}{ms}$ とする. さらに, $m d^2x(t)/dt^2$ が $x(t)$ と $dx(t)/dt$ で表されるので, これを引出し点, 定数倍のブロック, 加合わせ点で表現すると図3・7となる.

【4】 Fig.2 のように, 図3・16 に r_2, u_1, u_4 の変数を補う. Fig.2 の点線部分の伝達関数を $H(s) = G_2(s)G_1(s) + G_3(s)$ とおくと, r_2 から u_4 への伝達関数 ($L(s)$ とおく) はフィードバック結合の形であるから $L(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$ となる. さらに, 外側のフィードバックにより, r から y への伝達関数 $G(s)$ は $G(s) = \frac{G_4(s)L(s)}{1 + G_4(s)L(s)}$ となる. 以上より $G(s) = \frac{G_4(s)(G_1(s)G_2(s) + G_3(s))}{1 + (1 + G_4(s))(G_1(s)G_2(s) + G_3(s))}$ が得られる.

4章

【2】 容易.

【3】 ステップ応答の上側の包絡線 $K(1 + e^{-\zeta\omega_n t}/\beta)$ が定常値の $+M\%$ 以内に収まる, すなわち $K(1 + e^{-\zeta\omega_n t}/\beta) \leq 0.01KM$ となる最初の時刻 t で $T_s(M)$ を近似している. $e^{-\zeta\omega_n t}$ は単調減少なので, その時刻は上式で等号が成り立つ t , すなわち $t = \ln(0.01M\beta)/(-\zeta\omega_n)$ が式 (4・14) の近似式の右辺である.

【4】 ϕ を式 (4・21) の4行目で定義すると

$$\frac{\text{Re}G(j\omega)}{|G(j\omega)|} = \cos \phi, \quad \frac{\text{Im}G(j\omega)}{|G(j\omega)|} = \sin \phi$$

であり, これより $G(j\omega) = |G(j\omega)|(\cos \phi + j \sin \phi)$ と表すことができる. 式 (4・21) の一行目は

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + \frac{1}{2j} |G(j\omega)| (\cos \phi + j \sin \phi) (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-1}{2j} |G(j\omega)| (\cos \phi - j \sin \phi) (\cos \omega t - j \sin \omega t) \\
& = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + |G(j\omega)| (\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t)
\end{aligned}$$

となり、これより式(4・21)の三行目が得られる。

- 【5】 式(4・31)で $t = t_0$ とすると $e^{A \cdot 0} = I$ (式(4・28)で $t = 0$ とした場合) および積分区間が 0 の一点となることから、初期条件 $x(t_0) = x_0$ が成り立つことがわかる。次に、

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A, \quad e^{A(t-\tau)} = e^{At} e^{-A\tau}$$

となることを用いて式(4・31)の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left[e^{At} \left(e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \right) \right] \\
&= \frac{d e^{At}}{dt} \left(e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \right) + e^{At} \frac{d}{dt} \left(e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \right) \\
&= A e^{At} \left(e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \right) + e^{At} e^{-At} b u(t) \\
&= A x(t) + b u(t)
\end{aligned}$$

が得られ、 $x(t)$ が式(4・23)を満たしていることがわかる。

- 【6】 $U(s) = 1/s$ である。(1) $Y(s) = \frac{b}{Ts+1} U(s) = \frac{b/T}{s(s+1/T)} = \frac{b}{s} - \frac{b}{s+1/T}$. これを逆ラプラス変換して $y(t) = b(1 - e^{-t/T})$. (2) a, c のいずれかが非正の場合はシステムは不安定となるので(7・2節参照), $a, c > 0$ の場合を考える. 固有角周波数は $\omega_n = \sqrt{c}$, 減衰係数は $\zeta = a/(2\sqrt{c})$ となる. $a < 2\sqrt{c}$, $a = 2\sqrt{c}$, $a > 2\sqrt{c}$ がそれぞれ教科書 p.42 の 1, 2, 3 に対応する. (3) $\omega_n = 1$, $\zeta = 1/4$, $K = 1$ とおくと式(4・5)の形となる. $0 < \zeta < 1$ より, ステップ応答は式(4・6)を用いて $y(t) = 1 - \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-\frac{1}{4}t} \sin(\frac{\sqrt{15}}{4}t + \phi)$, $\phi = \tan^{-1} \sqrt{15}$. (4) $Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1/6}{s} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+3}$. $\therefore y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$.

- 【7】 $\dot{y}(t) + y(t) = 0.5u(t)$ の両辺をラプラス変換すると $sY(s) + Y(s) = 0.5U(s)$. よって u から y への伝達関数は $0.5/(s+1)$. 時定数は $T = 1$. ステップ応答は $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{0.5}{s(s+1)} \right\} = 0.5 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right)$ より $y(t) = 0.5(1 - e^{-t})$. $y(t)$ を Fig.3 に示す.

- 【8】 伝達関数は $\frac{5}{2s^2 + 0.5s + 3}$. $\omega_n = \sqrt{6}/2$, $\zeta = \sqrt{6}/24$, $K = 5/3$ とおくと式(4・5)の形となる. $0 < \zeta < 1$ より, ステップ応答は式(4・6)を用いて $y(t) = 5/3(1 - \sqrt{\frac{96}{95}} e^{-\frac{1}{8}t} \sin(\frac{\sqrt{95}}{8}t + \phi)$, $\phi = \tan^{-1} \sqrt{95}$. 定常値は $5/3$. $y(t)$ の最大値は式(4・11)より $M_{pt} = 2.8741$ となり, 式(4・12)から $P.O. = 0.7245$ となる.

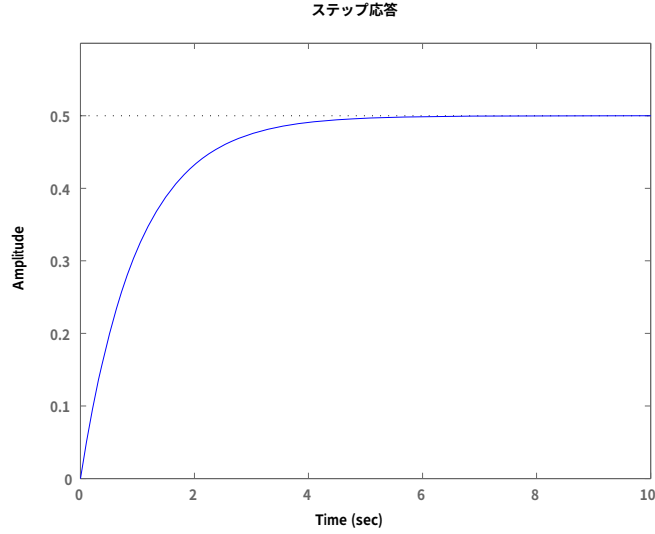


Fig. 3: 4章【7】，ステップ応答

【9】 $\omega_n = \sqrt{5}$ である．式(4・15)の $T_s(2)$ の近似式を用いると， $\zeta = 1/\omega_n$ より $a = 2\zeta\omega_n = 2$ が得られる．なお，得られた a に対する実際の2%整定時間は約 $3.74s$ となる．

【11】 $A = -0.5$, $b = 2$, $c = 5$ である． $u(t) = 1, t \geq 0$ とし，式(4・32)を用いると

$$y(t) = \int_0^t 5e^{-0.5(t-\tau)} 2d\tau = 10 \int_0^t e^{0.5(\tau-t)} d\tau = 20[e^{0.5(\tau-t)}]_0^t = 20(1 - e^{-0.5t})$$

【12】 式(4・38)を用いると

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ 0.8 & s + 0.1 \end{array}\right]^{-1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 0.1s + 0.8} \left[\begin{array}{cc} s + 0.1 & 1 \\ -0.8 & s \end{array}\right]\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 0.05)^2 + 0.7975} \left[\begin{array}{cc} (s + 0.05) + 0.05 & 1 \\ -0.8 & (s + 0.05) - 0.05 \end{array}\right]\right\} \end{aligned}$$

$\omega = \sqrt{0.7975}$ とおくと，表2・1より

$$e^{At} = e^{-0.05t} \begin{bmatrix} \cos \omega t + (0.05/\omega) \sin \omega t & (1/\omega) \sin \omega t \\ (-0.8/\omega) \sin \omega t & \cos \omega t - (0.05/\omega) \sin \omega t \end{bmatrix}$$

つぎに， $ce^{At}b = (e^{-0.05t}/\omega) \sin \omega t$ であるから，これと $u(\tau) = 1$ を式(4・32)に代入して計算すると $y(t) = 1.25(1 - \frac{40}{\sqrt{1595}}e^{-0.05t} \sin(\frac{\sqrt{319}}{20}t + \phi))$ ， $\phi = \tan^{-1} \sqrt{319}$ を得る．

5章

【1】式(5・4)の最初の等号は自明．二番目の等号は，一般に， a, b を実数とするとき

$$\left| \frac{a - jb}{a + jb} \right| = \frac{|a - jb|}{|a + jb|} = \frac{\sqrt{a^2 + (-b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

が成り立つことを用いて示すことができる．

【2】式(5・16)の $G_L(s)$ の位相($G_L(j\omega)$ の偏角)を計算すると

$$\begin{aligned} \angle G_L(j\omega) &= \angle \left(K \frac{jT_L\omega + 1}{j\alpha T_L\omega + 1} \right) = \angle \left(K \frac{(1 + \alpha T_L^2\omega^2) + jT_L(1 - \alpha)\omega}{(\alpha T_L\omega)^2 + 1} \right) \\ &\stackrel{*}{=} \angle ((1 + \alpha T_L^2\omega^2) + jT_L(1 - \alpha)\omega) = \tan^{-1} \frac{T_L(1 - \alpha)\omega}{1 + \alpha T_L^2\omega^2} \end{aligned}$$

ここで，※の等号では複素数の偏角が正数倍しても変化しないことを用いている．正接関数は単調であるから， $\angle G_L(j\omega)$ の最大値を達する $\omega = \omega_n$ は $\tan \angle G_L(j\omega)$ の最大値を達する ω でもある（偏角の範囲が $0^\circ \sim 90^\circ$ であることに注意）．よって

$$\frac{d}{d\omega} \tan \angle G_L(j\omega) = \frac{d}{d\omega} \frac{T_L(1 - \alpha)\omega}{1 + \alpha T_L^2\omega^2} = \frac{T_L(1 - \alpha)(1 - \alpha T_L^2\omega^2)}{(1 + \alpha T_L^2\omega^2)^2}$$

の符号を考えればよい． $\alpha \in (0, 1)$ に注意すると，上式は $\omega = \omega_{\max}$ で0となり， $\omega < \omega_{\max}$ で正， $\omega > \omega_{\max}$ で負である．よって $\omega = \omega_{\max}$ で $\angle G_L(j\omega)$ は最大となる． $\phi_{\max}$ は $\omega_{\max}$ を上記の $\angle G_L(j\omega)$ の式の右辺に代入すれば得られる．

【3】前問とまったく同様に

$$\begin{aligned} \angle G_D(j\omega) &= \tan^{-1} \frac{T_L(1 - \beta)\omega}{1 + \beta T_L^2\omega^2} \\ \frac{d}{d\omega} \tan \angle G_D(j\omega) &= \frac{T_L(1 - \beta)(1 - \beta T_L^2\omega^2)}{(1 + \beta T_L^2\omega^2)^2} \end{aligned}$$

を得る． $\beta > 1$ であることに注意すると， $\omega = \omega_{\min}$ で最小値 $\phi_{\min}$ を取ることがわかる．

【4】問【1】と同様の絶対値の計算を利用して，以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \left| \frac{jT_1\omega + 1}{jT_2\omega + 1} - \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right| &= \left| \frac{2T_2(jT_1\omega + 1) - (T_1 + T_2)(jT_2\omega + 1)}{2T_2(jT_2\omega + 1)} \right| \\ &= \left| \frac{(T_1 - T_2)(j\omega T_2 - 1)}{2T_2(jT_2\omega + 1)} \right| = \frac{|T_1 - T_2|}{2T_2} \end{aligned}$$

【5】 $|G(j\omega)|$ が最大になるのは，分母の根号の中の第一項 $(\omega^2 - (1 - 2\zeta^2)\omega_n^2)^2$ が0になるときで，このとき $\omega = \omega_p$ である． $M_{p\omega}$ の右辺は ω に ω_p を代入することで容易に得られる．

【6】容易．

- 【7】 式(4・21)を利用する. $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ の場合, $Y(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ を逆ラプラス変換して

$$y(t) = \frac{2\omega}{\omega^2 + 9}e^{-3t} - \frac{\omega}{\omega^4 + 4}e^{-2t} + |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

となる. MATLABで, 正弦波応答とその過渡応答, 定常応答を計算するプログラムの例を示す.

```
>> G=zpk(-1,[-2 -3],1);
>> om=pi/3; % om はω
>> T=0:0.01:5; % 時間列
>> Ya=lsim(G,sin(om*T),T)'; % 正弦波応答
>> Yt=2*om/(9+om^2)*exp(-3*T) - om/(om^2+4)*exp(-2*T); % 過渡応答の項
>> [r,thd]=bode(G,om); % システム G の角周波数 om における ゲイン, 位相(単位:deg) がそれぞれ r, thd に代入される.
>> th=thd/180*pi; % ラジアンに変換
>> Ys=r*sin(om*T+th); % 定常応答
>> plot(T,Yt,'-.',T,Ys,'--',T,Ya,'-',T,(Yt+Ys),'+');grid on % グラフ描画
```

Ya と Yt+Ys が一致することが確かめられる. $G(s) = \frac{1-s}{s^2 + s + 1}$ の場合は次式となる.

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}(a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)) + |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi),$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad a = \frac{2\omega - \omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}, \quad b = \frac{a(\omega - \frac{1}{2}) + \omega}{\omega_1}, \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

- 【9】 省略.

- 【10】 $G(s) = \frac{2}{s^2 + 0.5s + 2}$ は, 式(5・24)の標準形で $\omega_n = \sqrt{2}$, $\zeta = \sqrt{2}/8$, $K = 1$ となる. $\zeta < \sqrt{0.5}$ であるので共振ピークを持つ. (1) 式(5・26)を参照しよう. ピークゲインとピーク周波数は, それぞれ $M_{pw} = 16/\sqrt{31}$, $\omega_p = \sqrt{30}/4$ となる. (2) 式(5・28)を用いて, バンド幅は $\omega_B = 2.1486$ となる.

$G(s) = \frac{1}{5s^2 + 2.5s + 1}$ では $\omega_n = 1/\sqrt{5}$, $\zeta = 1/\sqrt{5} < \sqrt{0.5}$, $K = 1$. これより (1) $M_{pw} = 1.25$, $\omega_p = \sqrt{3}/5$, (2) $\omega_B = 0.5943$.

- 【11】 それぞれ Fig.4, Fig.5 に示す. 各図の実線は伝達関数, 点線はその折れ線近似であり, ○印は折れ点である.

- 【12】 伝達関数は

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 0.5}$$

となる. ボード線図・ベクトル線図は省略.

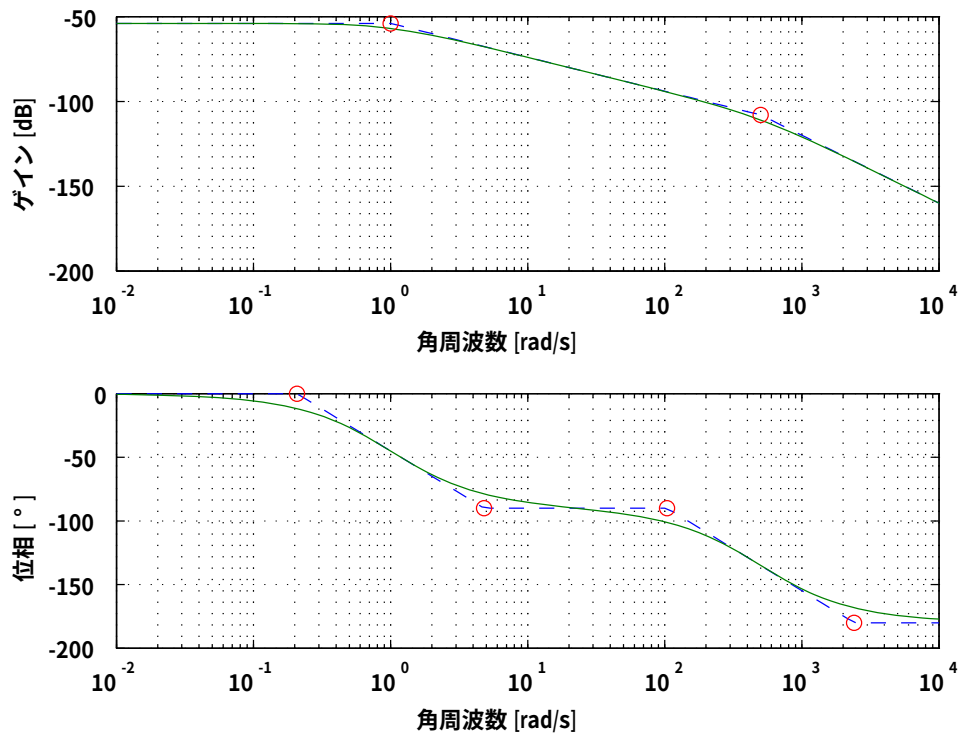


Fig. 4: 4章【11】， $\frac{1}{(s+1)(s+500)}$ のボード線図と折れ線近似

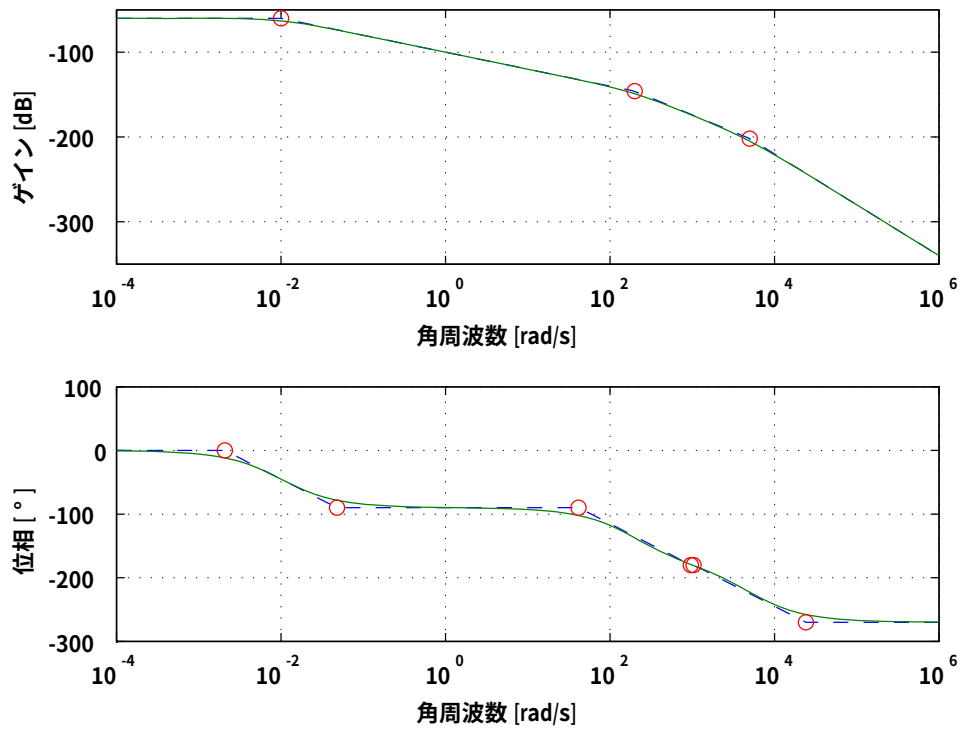


Fig. 5: 4章【11】， $\frac{10}{(s+0.01)(s+200)(s+5000)}$ のボード線図と折れ線近似