【問題 1】
xy 平面の x 軸を地面とみなし，車輪の初期位置を $(0,1)$ を中心とする半径 1 の円とみなす．車輪が角度 θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ だけ回転した時の中心の座標は $(\theta,1)$ なので，印の座標は $(x,y)=(\theta-\sin\theta, 1-\cos\theta)$ と表せる．求める面積 S は積分 $S=\displaystyle\int_0^{2\pi} y dx$ で与えられるので，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$ を用いて θ についての積分に書き直すと

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} ydx = \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{\cos 2\theta}{2}\right) \\ &= \left[\frac{3\theta}{2}-2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$

となる．よって答えは $\boldsymbol{3\pi}$ である．

【問題 2】
まず $0 \leqq F_n \leqq 2^n$ を示す．$n=1,2$ のときは明らかに成立している．$n \geqq 3$ のとき，$n-1, n-2$ での成立を仮定すると

$$0 \leqq F_n = F_{n-1}+F_{n-2} \leqq 2^{n-1}+2^{n-2} < 2^n$$

より n でも成立する．よって帰納法により，全ての n について $0 \leqq F_n \leqq 2^n$ となる．
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k}{10^k}$ とおくと

$$\frac{1}{10}S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{F_k}{10^{k+1}} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{F_{k-1}}{10^k}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{11}{10}S_n &= \frac{1}{10}+\sum_{k=2}^{n}\frac{F_{k+1}}{10^k}+\frac{F_n}{10^{n+1}} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{F_k}{10^{k-1}}+\frac{F_n}{10^{n+1}} \\ &= 10S_n - 1 + \frac{F_{n+1}}{10^n}+\frac{F_n}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k}{10^k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{89}\left(1-\frac{F_{n+1}}{10^n}-\frac{F_n}{10^{n+1}}\right)$$

となるが，最初に示した不等式 $0 \leqq F_n \leqq 2^n$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}} = 0$$

である．よって答えは $\boldsymbol{\dfrac{10}{89}}$ である．