

付録3

外積

1. 外積
2. 外積と平行四辺形
3. 外積と内積

1. 外積

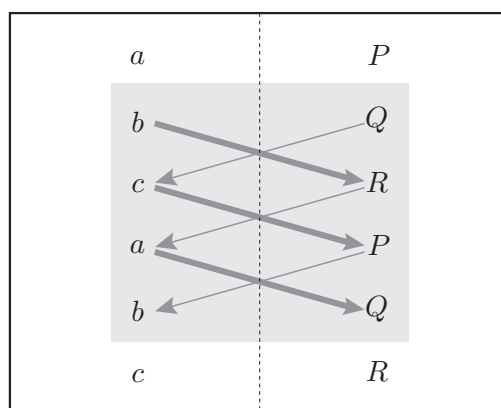
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ は R^3 の任意の元だとして。

$$\begin{pmatrix} bR - Qc \\ cP - Ra \\ aQ - Pb \end{pmatrix}$$

というベクトルを**外積**といいます。外積は**ベクトル積**とか**クロス積**とも呼ばれます。

外積は、「 $\times$ 」^{クロス}を用いて、 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ と表記するのが一般的です。

外積を覚えるコツを下图に示しました。



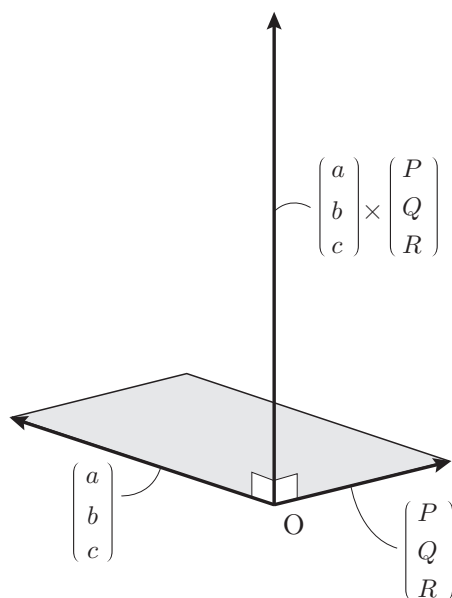
2. 外積と平行四辺形

外積 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ は、

① ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ に直交する。

② 長さが「隣り合う2辺がベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ である平行四辺形」の面積に一致する。

という特徴を有しています。つまり下図の特徴を有しています。



念のため、前ページの①と②の本当に成立することを確認しておきます。

①の確認	$ \begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bR - Qc \\ cP - Ra \\ aQ - Pb \end{pmatrix} \\ &= a(bR - Qc) + b(cP - Ra) + c(aQ - Pb) \\ &= \boxed{abR} - \boxed{aQc} + \boxed{bcP} - \boxed{bRa} + \boxed{caQ} - \boxed{cPb} \\ &= 0 \end{aligned} $ $ \begin{aligned} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bR - Qc \\ cP - Ra \\ aQ - Pb \end{pmatrix} \\ &= P(bR - Qc) + Q(cP - Ra) + R(aQ - Pb) \\ &= \boxed{PbR} - \boxed{PQc} + \boxed{QcP} - \boxed{QRa} + \boxed{RaQ} - \boxed{RPb} \\ &= 0 \end{aligned} $
②の確認	$ \begin{aligned} \left\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right\ ^2 &= \left\ \begin{pmatrix} bR - Qc \\ cP - Ra \\ aQ - Pb \end{pmatrix} \right\ ^2 \\ &= (bR - Qc)^2 + (cP - Ra)^2 + (aQ - Pb)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2) - (aP + bQ + cR)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2) - \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2) - (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2)\cos^2\theta \leftarrow \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2)(1 - \cos^2\theta) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(P^2 + Q^2 + R^2)\sin^2\theta \quad \theta \text{ は、} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \text{ のなす角です。} \\ &= \left(\left\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\ \left\ \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right\ \sin\theta \right)^2 \end{aligned} $

3. 外積と内積

下表は、外積と内積を比較した結果を記したものです。眺めておいてください。

外積	内積
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 5 \times 3 \\ 3 \times 4 - 6 \times 1 \\ 1 \times 5 - 4 \times 2 \end{pmatrix}$ $= - \begin{pmatrix} 5 \times 3 - 2 \times 6 \\ 6 \times 1 - 3 \times 4 \\ 4 \times 2 - 1 \times 5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6$ $= 4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1c \\ 2c \\ 3c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \times 6 - 5 \times 3c \\ 3c \times 4 - 6 \times 1c \\ 1c \times 5 - 4 \times 2c \end{pmatrix}$ $= c \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 5 \times 3 \\ 3 \times 4 - 6 \times 1 \\ 1 \times 5 - 4 \times 2 \end{pmatrix}$ $= c \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$	$\begin{pmatrix} 1c \\ 2c \\ 3c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1c \times 4 + 2c \times 5 + 3c \times 6$ $= c(1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6)$ $= c \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4+7 \\ 5+8 \\ 6+9 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 \times (6+9) - (5+8) \times 3 \\ 3 \times (4+7) - (6+9) \times 1 \\ 1 \times (5+8) - (4+7) \times 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 5 \times 3 \\ 3 \times 4 - 6 \times 1 \\ 1 \times 5 - 4 \times 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \times 9 - 8 \times 3 \\ 3 \times 7 - 9 \times 1 \\ 1 \times 8 - 7 \times 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4+7 \\ 5+8 \\ 6+9 \end{pmatrix}$ $= 1 \times (4+7) + 2 \times (5+8) + 3 \times (6+9)$ $= (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) + (1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9)$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$