付録2

内積

1. 内積

1.1 長さ

$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ は$\boldsymbol{R}^n$の任意の元だとします。

$$\sqrt{{x_{1i}}^2+{x_{2i}}^2+\cdots+{x_{ni}}^2}$$

を「ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ の**長さ**」といいます。長さは**大きさ**とか**ノルム**とも呼ばれます。

「ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ の長さ」は、$\left\|\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right\|$ と表記するのが一般的です。

例

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}=\sqrt{2-2\sqrt{12}+6+2+2\sqrt{12}+6}=\sqrt{16}=4$$

1.2　内積

$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の任意の元だとします。

$$x_{1i}x_{1j}+x_{2i}x_{2j}+\cdots+x_{ni}x_{nj}$$

を「ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ の**内積**」といいます。内積は**スカラー積**とか**ドット積**とも呼ばれます。

「ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ の内積」は、「・(ドット)」を用いて、$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ と表記するのが一般的です。

例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix} = 1\times(\sqrt{2}-\sqrt{6})+\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = \sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{18} = \sqrt{2}+3\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}$$

1.3　なす角

$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ は$\boldsymbol{R}^n$の任意の元だとします。

$$\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \right\| \times \cos\theta$$

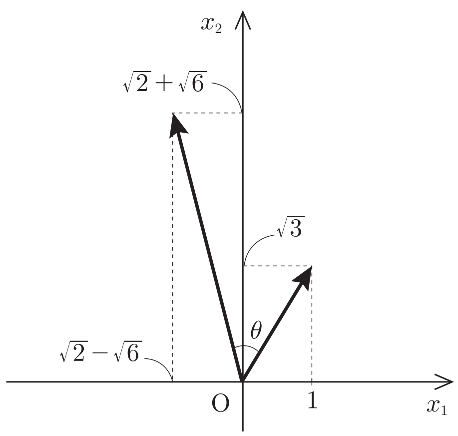
を満たすθを「ベクトル $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ の**なす角**」といいます。

例

ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}$ のなす角θは、

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4\sqrt{2}}{2\times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

であることから、$\theta = 45^\circ$ である。



1.4　数学者から見た内積

内積についても、22 ～ 23 ページで述べた線形代数と同様に、数学者の認識は異なります。

数学者の視点でいうと、**内積**とは、以下の囲みに示す**実計量線形空間**の定義内に登場するもののことです[1]。

■ **実計量線形空間**

$\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ と $\boldsymbol{x}_k$ は集合 X の任意の元だとする。c は任意の実数だとする。

集合 X が実線形空間でなおかつ以下の条件を満たす場合に、「集合 X は**実計量線形空間**である」とか「集合 X は**ユークリッド空間**である」という。

条件

$\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ に対し、**内積**と呼ばれる、$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j$ という実数が定まる。なおかつ内積は以下の条件を満たす。

① $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{x}_i$

② $(c\boldsymbol{x}_i) \cdot \boldsymbol{x}_j = c(\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{x}_i \cdot (c\boldsymbol{x}_j)$

③ $\boldsymbol{x}_i \cdot (\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_k$　　$(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_j) \cdot \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{x}_k$

④ $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i \geqq 0$ であり、$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ の場合のみ $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i = 0$ である。

①から④までの条件をあわせて**実内積の公理**という。

1　本書では解説していませんけれども、本当の本当は、**複素計量線形空間**というものの定義内にも内積は登場します。

2. 正規直交基底

たとえば$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$や$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$や$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$のように、

・各ベクトルの長さが1

・2つのベクトルの内積が0

という基底を**正規直交基底**といいます。$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$というタイプの正規直交基底は特別に**標準基底**とか**自然基底**と呼ばれます。

本書では解説していませんけれども、正規直交基底ではない基底から正規直交基底を編み出す、**シュミットの直交化法**という方法が世の中には存在します。