# 0章　学ぶための教養

## 【1】

(i) $A=(5-j6)(-3+j4)=9+j38$ より

$$\mathrm{Re}[A]=9,\ \mathrm{Im}[A]=38$$

$$|A|=5\sqrt{61},\ \arg A=\tan^{-1}\frac{38}{9}\approx 76.7°$$

(ii) $B=\dfrac{x_1+jy_1}{x_2-jy_2}=\dfrac{1}{x_2^2+y_2^2}\left[(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)\right]=\dfrac{1}{x_2^2+y_2^2}\left[(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)\right]$

この実部と虚部を次のようにおく．

$$R=\frac{(x_1x_2-y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2},\ X=\frac{(x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}$$

これより

$$|B|=\sqrt{R^2+X^2},\ \arg B=\tan^{-1}\frac{X}{R}$$

(iii) $C=\dfrac{1}{x_1+jy_1}+jy_2=\dfrac{x_1-jy_1}{x_1^2+y_1^2}+jy_2=\dfrac{1}{x_1^2+y_1^2}\left[x_1+j\left\{y_2(x_1^2+y_1^2)-y_1\right\}\right]$

この実部と虚部を次のようにおく．

$$R=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\ X=\frac{y_2(x_1^2+y_1^2)-y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

これより

$$|C|=\sqrt{R^2+X^2},\ \arg C=\tan^{-1}\frac{X}{R}$$

## 【2】

$D$の分子および分母に現れている角度はそれぞれにおいて等しいから, 次式のように複素数表現すれば, 簡単に答えを導くことができる．

$$D=\frac{2(\cos\varphi+j\sin\varphi)}{4(\cos\theta+j\sin\theta)}=\frac{2\angle\varphi}{4\angle\theta}=\frac{1}{2}\angle(\varphi-\theta)$$

この計算を三角関数の公式（倍角，半角）などを用いると，大変な作業になる．

## 【3】

(i)

$$\mathrm{Im}[Z]=\pm\sqrt{|Z|^2-\mathrm{Re}[Z]}=\pm\sqrt{5^2-3^2}=\pm 4$$

$$\arg Z=\tan^{-1}\frac{\pm 4}{3}\approx\pm 53.1°$$

(ii)

$$\mathrm{Re}[Z]=\pm\sqrt{|Z|^2-\mathrm{Im}[Z]}=\pm\sqrt{10^2-(-8.66)^2}\approx\pm 5$$

$$\arg Z=\sin^{-1}\frac{-8.66}{10}=\tan^{-1}\frac{-8.66}{\pm 5}\approx -60°,\ \ -120°$$

【4】

$A = 8 + j6.72 \approx 10.45\angle 40°$

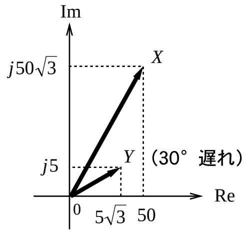
$B = -9 + j2 \approx \sqrt{85}\angle 167.5°$（127.5゜進み）

$C = 6\angle(-40°) = 4.60 - j3.86$（80゜遅れ）

$D = 5\angle 220° = -3.83 - j3.21$（180゜遅れ）

【5】

$X$ と $Y$ のベクトル図を右図に示す.




$X = 50 + j50\sqrt{3} = 100\angle 60°$

$Y = 5\sqrt{3} + j5 = 5\angle 30°$

$XY = 100 \cdot 5\angle(60° + 30°) = 500\angle 90°$

$\frac{X}{Y} = \frac{100}{5}\angle(60° - 30°) = 20\angle 30°$

【6】

$X = 4 + j4 = 4\sqrt{2}\angle 45°$

であるから，これに各進みを施した結果を次に示す.

| 進み角 | 結果 |
|---|---|
| $15°$ | $4\sqrt{2}\angle 60°$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $4\sqrt{2}\angle 75°$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $4\sqrt{2}\angle 105°$ |
| $100°$ | $4\sqrt{2}\angle 145°$ |

大きさが変わらないことに留意されたい.

【7】

題意が要求していることは，大きさが変わらないから，次式と同じである.

$Z_2 = Z_1 \times e^{j45°}$

これより

$$Z_2 = R + jX = Z_1 \times e^{j45°}$$
$$= \left(4\sqrt{3} + j4\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right) + j\left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)$$

$\therefore R = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ , $X = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

# 1 章　直流回路基礎

**【1】**

銅線の面積は

$$S=\left(\frac{200\times10^{-6}}{2}\right)^2\pi=\left(100\times10^{-6}\right)^2\pi=10^{-8}\pi$$

であるから

$$R=\rho\frac{l}{S}=1.72\times10^{-8}\times\frac{2\times10^3}{10^{-8}\pi}\approx1095\ \Omega$$

**【2】**

半径を $d$，長さを $l$，抵抗率を $\rho$ とおいたとき，もとの導線の抵抗は

$$R=\rho\frac{l}{\pi d^2}$$

半径を 1/4，長さを 2 倍にすると

$$R'=\rho\frac{2l}{\pi\left(d/4\right)^2}=\rho\frac{l}{\pi d^2}\times\frac{2}{1/16}=32R$$

すなわち，もとの抵抗の 32 倍となる．

**【3】**

抵抗の温度上昇に関する式は

$$R_2=R_1\left\{1+\alpha\left(T_2-T_1\right)\right\}$$

であるから，これより

$$T_2=\frac{R_2-R_1}{\alpha R_1}+T_1=\frac{23-21.8}{\frac{1}{403.3}\times21.8}+0=22.2\ ℃$$

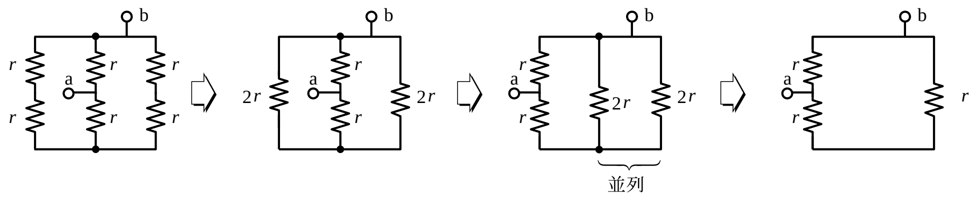
**【4】**

合成抵抗を $r_T$ とおく．

(a)　$r_T=\dfrac{r\times3r}{r+3r}=\dfrac{3r^2}{4r}=\dfrac{3}{4}r$

(b)　回路の左端の枝が短絡されているから　$r_T=0$．

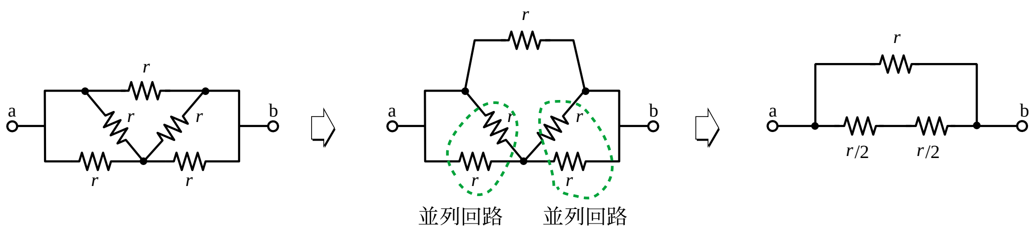
(c)　下図のように回路図を変形する．




最後の変形した図より

$$r_T=\frac{2r\times r}{2r+r}=\frac{2}{3}r$$

(d)　下図のように回路を変形して考える．




最後の変形図より，次の答えを得る．

$$r_T = \frac{r}{2}$$

**【5】**

SW が開いているときの合成抵抗 $R_O$ は

$$R_O = \frac{(16+8)\times(8+R_4)}{(16+8)+(8+R_4)}$$

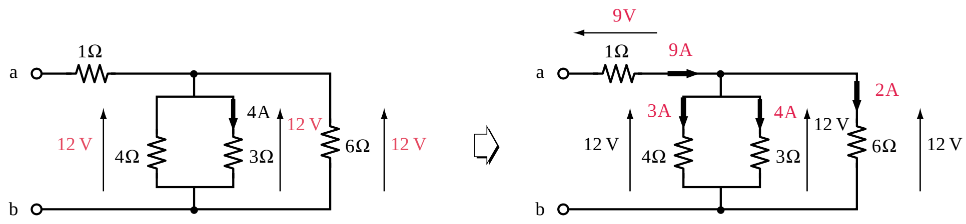
SW が閉じているときの合成抵抗 $R_C$ は

$$R_C = \frac{16\times 8}{16+8} + \frac{8\times R_4}{8+R_4}$$

この両式を解くと，$R_4 = 4\Omega$ を得る．

**【6】**

3 Ω の抵抗に 4 A が流れているから，この事実を利用する．この抵抗の両端には 12 V の電圧が発生しているから，これを手掛かりにして考えると，下図のような電圧が発生，電流が流れていることがわかる．




これより，端子 ab 間の電圧は

$$V_{ab} = 9 + 12 = 21\,\mathrm{V}$$

**【7】**

$$V_{ac} = -20V,\quad V_{bc} = -10V,\ V_{dc} = 10V$$

**【8】**

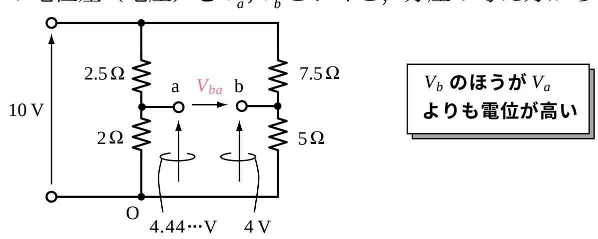
図のように，O を基準電位とする．O と端子 a, b の電位差（電圧）を $V_a, V_b$ とおくと，分圧の考え方から

$$V_a = \frac{2}{2.5+2}\times 10 = \frac{20}{4.5}$$

$$V_b = \frac{5}{7.5+5}\times 10 = \frac{50}{12.5}$$

これより

$$V_{ba} = V_b - V_a \approx -0.44\,\mathrm{V}$$

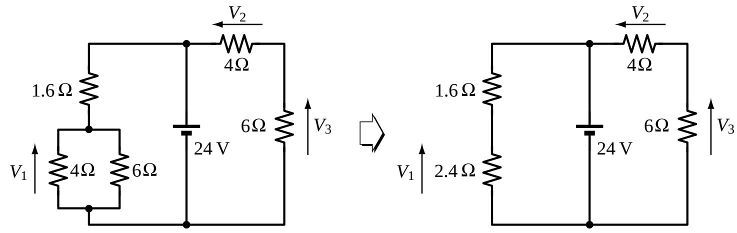


【9】

(a)

$$V_1 = \frac{20}{150} \times 600 = 80\ \mathrm{V}\ ,\ V_2 = \frac{30}{150} \times 600 = 120\ \mathrm{V}\ ,\ V_3 = \frac{100}{150} \times 600 = 400\ \mathrm{V}$$

(b) 図のように変形して考えれば，分圧の考え方から電圧が求められる．




$$V_1 = \frac{2.4}{1.6 + 2.4} \times 24 = 14.4\ \mathrm{V}\ ,\ V_2 = \frac{4}{6+4} \times 24 = 9.6\ \mathrm{V}\ ,\ V_3 = 24 - V_2 = 14.4\ \mathrm{V}$$

【10】

(a) 全ての抵抗にかかる電圧は同じだから

$$I_1 = \frac{1}{15} \times 90 = 6\ \mathrm{A},\ I_2 = \frac{1}{30} \times 90 = 3\ \mathrm{A},\ I_1 = \frac{1}{45} \times 90 = 2\ \mathrm{A}$$

(b) 分流の考え方より

$$I_1 = \frac{1/15}{1/15 + 1/12 + 1/6} \times 9 = 4\ \mathrm{A}$$

同様にして，$I_2 = 5$ A , $I_3 = 10$ A.

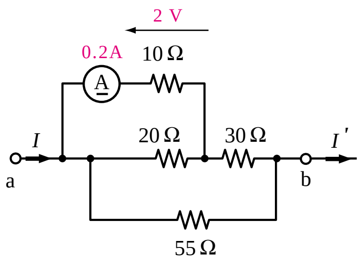
別解として，もとの回路図の 12 Ω と 6 Ω の抵抗器を合成（= 4 Ω）し，抵抗器の数を 2 個にする．そうすれば，分流の考え方を適用して

$$I_1 = \frac{4}{15 + 4} \times 19 = 4\ \mathrm{A}$$

もとの電流 19 A からこの電流 4 A を差し引けば（=15 A），12 Ω と 6 Ω の抵抗器に流れる電流であるから，再度，分流の考え方から $I_2 = 5$ A , $I_3 = 10$ A を得る．

【11】

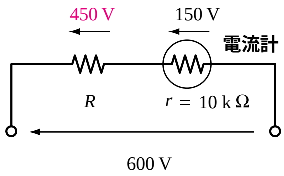
電流計に 0.2 A 流れるのだから，10 Ω の抵抗器の両端に 2 V の電圧が発生する（右図参照）．このように，オームの法則を適用して考えればよい．




10 Ω の抵抗器と 20 Ω の抵抗器は並列だから，2 V の電圧は，20 Ω の抵抗器にもかかる（(i)の答え）．これより，20 Ω の抵抗器には，0.1 A が流れる．

30 Ω の抵抗器に流れる電流は, 10 Ω および 20 Ω の抵抗器に流れる電流の和であるから，0.3 A である（(ii)の答え）．これより，30 Ω の抵抗器にかかる電圧は 9 V となる．55 Ω の抵抗器は，20 Ω と 30 Ω の抵抗器と並列であるから，55 Ω の抵抗器にかかる電圧は，20 Ω と 30 Ω の抵抗器にかかる電圧と同じ．したがって，11 V である（(iii)の答え）．これより，55 Ω の抵抗器に流れる電流は 0.2A．よって，端子 b から流出する電流は 0.5 A となる（(iv)の答え）．

**【12】**




600 V を計測しているとき電圧計には 150 V かかる．このため，差し引いた450Vが分圧器にかかる．直列の場合，流れる電流は各抵抗器に共通であるから

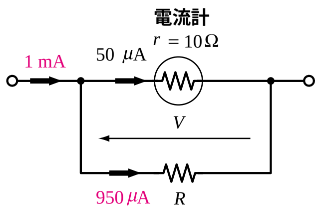
$$I = \frac{150\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}} = \frac{450\ \mathrm{V}}{R} \qquad \therefore\ R = 30\ \ \mathrm{k\Omega}$$

別解として，抵抗器の直列接続の場合，抵抗と電圧は比例するから

$$R : 10\ \mathrm{k\Omega} = 450\ \mathrm{V} : 150\ \mathrm{V}$$

から計算してもよい．

**【13】**




分流器を右図のように，電流計に並列に接続する．1mAを計測して，電流計には 50 $\mu$A を流すのだから，分流器には差し引き 950 $\mu$A を流せばよい．このとき，電流計と分流器にかかる電圧は同じだから，オームの法則より

$$50\ \mu\mathrm{A} \times 10\ \Omega = 950\mu\mathrm{A} \times R \qquad \therefore R = \frac{500}{950} = \frac{10}{19} \approx 0.53\ \ \Omega$$

次に，電流計に 40 $\mu$A が流れているとき，その両端の電圧は

$$40\mu\mathrm{A} \times 10\ \Omega = 400 \times 10^{-6}\ \mathrm{V}$$

この電圧は，分流器にもかかるから，分流器に流れる電流は

$$\frac{400 \times 10^{-6}}{10/19} = 760 \times 10^{-6}\ \mathrm{A} = 760\mu\mathrm{A}$$

よって，$760\mu\mathrm{A} + 40\mu\mathrm{A} = 800\mu\mathrm{A}$ を計測していることになる．

**【14】**

題意から次の連立方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} E - 5r = 102 \\ E - 10r = 91 \end{cases}$$

0 章に示す連立方程式の解法にならって

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ 91 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} E \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{1\times(-10) - 1\times(-5)}\begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 102 \\ 91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

すなわち，$E = 113\ \mathrm{V}$ , $r = 2.2\ \ \Omega$．

【15】

電池は，直列接続すると，電圧（起電力）は上がるが，合成の内部抵抗も大きくなる．一方，並列接続すると，電圧（起電力）は変わらないが，合成の内部抵抗は小さくなる．したがって，直列あるいは並列接続がいいかは一概にわからないので，式により検証する．

(a) $\dfrac{1}{15+10/4} \approx 0.058 \text{ A}$

(b) $\dfrac{2}{15+10+10/3} \approx 0.070 \text{ A}$

(c) $\dfrac{3}{15+10+10+10/2} = 0.075 \text{ A}$

(d) $\dfrac{2}{15+5+5} = 0.08 \text{ A}$

(e) $\dfrac{4}{15+40} \approx 0.073 \text{ A}$

これより, (d)の電流が最も大きい.

【16】

流れる電流は

$$I = \frac{P}{V} = \frac{60}{100} = 0.6\text{A}$$

次に

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \qquad \therefore R = \frac{V^2}{P} = \frac{100^2}{60} \approx 166.7\Omega$$

【17】

$P = VI = \dfrac{V^2}{R}$　より　$W = Pt = \dfrac{V^2}{R}\,t$　がいえる．これより

$$R = \frac{V^2 t}{W} = \frac{100^2 \times 5 \times 60}{4000} = 750\Omega$$

【18】

ハンダごての抵抗は

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{120^2}{1200} = 12\Omega$$

ハンダごてを 60 V で使用すると

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{60^2}{12} = 300 \text{ W} = 0.3\text{kW}$$

この問題は，もちろん抵抗の値を具体的に知らなくても解ける．120 V 使用時の電力を $P$，ハンダごての抵抗を $R$ とおくと

$$P = \frac{V^2}{R}$$

（$P = VI$ の式で考えるとだめ．本文参照）．電圧が半分になるのだから

$$P' = \frac{\left(V/2\right)^2}{R} = \frac{P}{4}$$

すなわち，もとの電力の 1/4 倍となる．

【19】

(i) $P = I^2 R = \left(20\times10^{-3}\right)^2 \times 3.3\times10^3 = 1.32\,\mathrm{W}$

(ii) $P = I^2 R$ より

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0.5}{50}} = 0.1\,\mathrm{A}$$

【20】

電熱器に流れる電流を求めてから電力を求めてもよいが，ここでは，電圧と抵抗から直接，電力を求めると

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{10^2}{2} = 50\,\mathrm{W}$$

これを 10 分間使用したのだから，この消費電力は

$$W = Pt = 50\times10\times60 = 30000\,\mathrm{J}$$

次に，$[\mathrm{W\cdot h}] = 3600[\mathrm{W\cdot s}] = 3600\,\mathrm{J}$ より

$$W = 30000\,\mathrm{J} = \frac{30000}{3600}[\mathrm{W\cdot h}] \approx 8.3\,\mathrm{W\cdot h}$$

【21】

$0.2\ \mathrm{kW\cdot h}$ の電力量は，次の電気エネルギー（電気的な仕事）に等しい.

$$0.2\,\mathrm{kW\cdot h} = 0.2\times10^3\times3600 = 0.72\times10^6\ \mathrm{J}$$

電気エネルギーと水の質量と上昇温度の関係は

$$[\mathrm{J}] = 4.18\times[\mathrm{g}]\times[^\circ\mathrm{C}] \quad \left([\mathrm{cal}] = [\mathrm{g}]\times[^\circ\mathrm{C}]\right)$$

である．これより

$$[^\circ\mathrm{C}] = \frac{[\mathrm{J}]}{4.18\times[\mathrm{g}]} = \frac{0.72\times10^6}{4.18\times100\times10^3} \approx 1.72\ ^\circ\mathrm{C}$$

【22】

$$[\mathrm{J}] = 4.18\times[\mathrm{g}]\times[^\circ\mathrm{C}]$$

より

$$[\mathrm{J}] = 4.18\times209\times10^3\times(40-20) = 17.5\times10^6[\mathrm{J}]$$

$$\therefore\ t = \frac{17.5\times10^6}{P} = \frac{17.5\times10^6}{200} = 8750\,\mathrm{s}$$

これより，所要時間は 145 分 50 秒である.

【23】

内部抵抗＝外部（負荷）抵抗

のとき，負荷での消費電力は最大となるから

$$R = \frac{100\times100}{100+100} = 50\Omega$$

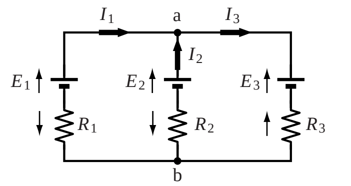
## 2章　直流回路網解析

【1】

$I_1 = 0.14$ A,　b から a へ　　　　$I_2 = 0.08$ A,　b から a へ

$I_3 = 0.22$ A,　a から b へ

【2】

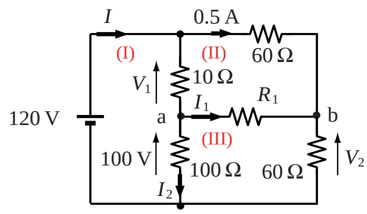



問題の図にある電流の方向より，各電圧の方向は右図のようになる．各電圧の極性を表す矢印の方向に注意されたい. これより, キルヒホッフの法則に関する式が得られる.

$$E_1 - E_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0$$
$$E_3 - E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$
$$I_1 + I_2 = I_3$$

ここで，$I_2 = 0.025$ A であるから，これらを解くと $R_2 = 10\Omega$，これより，$V_{ab} = 3.75$ V.

【3】




(i) 閉回路(I)を見ると，キルヒホッフの電圧に関する法則より

$$120 - V_1 - 100 = 0$$

よって，$V_1 = 20$ V.

(ii) $V_1 = 20$ V だから, $10\Omega$ の抵抗器には，20 / 10 ＝2 A が流れる．したがって

$$I = 2 + 0.5 = 2.5 \text{ A}$$

$I_2$ について，100 Ω の抵抗器には 100 V がかかっているから，この抵抗器には $I_2 = 1$A の電流が流れている.

これより，キルヒホッフの電流に関する法則より

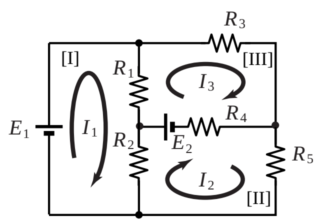
$$I_1 = I_2 - 2 = 1 \text{ A}$$

(iii) 閉回路(III)にある 60 Ω の抵抗器には，1.5 A の電流が流れているから，この両端の電圧 $V_2 = 90$V.

(iv) 電源の一極を電位の基準として考えると，点 a の電位は 100V，点 b の電位は 90 V，したがって，点 ab 間の電位差（すなわち，電圧）は 10V である．したがって，オームの法則より，$R_1 = 10 \text{ V} / I_1 = 10\,\Omega$.

【4】

右図より，次の結果が得られる.



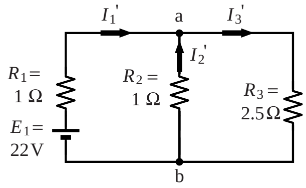

(I)　$E_1 - R_1(I_1 - I_3) - R_2(I_1 - I_2) = 0$

(II)　$E_2 + R_2(I_2 - I_1) + R_5 I_2 + R_4(I_2 - I_3) = 0$

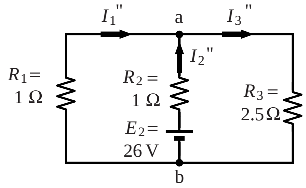
(III) $E_2 - R_1(I_3 - I_1) - R_3 I_3 - R_4(I_3 - I_2) = 0$

【5】

(a) 二つの電源があるから，それぞれ単独に存在する回路に分離して，右図を考える．この図において




$$I_1' = \frac{22}{1+\dfrac{1\times 2.5}{1+2.5}} = \frac{22\times 3.5}{6} = \frac{77}{6}$$




次に，分流の考え方を用いると次を得る．

$$I_2' = \frac{2.5}{1+2.5}\times\frac{77}{6} = \frac{55}{6}$$

$$I_3' = \frac{1}{1+2.5}\times\frac{77}{6} = \frac{22}{6}$$

同様にして

$$I_2'' = \frac{26}{1+\dfrac{1\times 2.5}{1+2.5}} = \frac{26\times 3.5}{6} = \frac{91}{6}$$

$$I_1'' = \frac{2.5}{1+2.5}\times\frac{91}{6} = \frac{65}{6}$$

$$I_3'' = \frac{1}{1+2.5}\times\frac{91}{6} = \frac{26}{6}$$

これらを重ね合わせるとき，電流の方向で，その符号が定まることに注意すると，次の結果を得る．

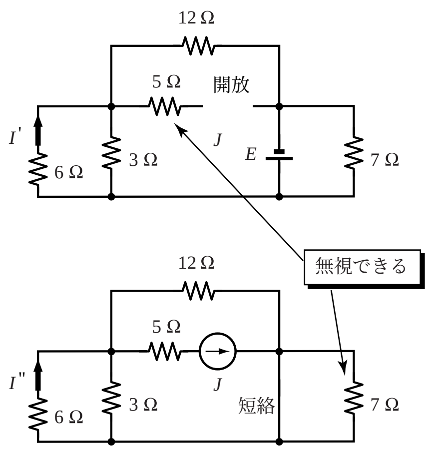
$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{77}{6} - \frac{65}{2} = 2\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = \frac{91}{6} - \frac{55}{6} = 6\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \frac{22}{6} + \frac{26}{2} = 8\,\mathrm{A}$$

(b)　電圧源のみの回路と，電流源のみの回路を右に示す．このとき，電流源は開放，電圧源は短絡にすることに注意されたい．

電圧源のみの回路において，電圧源から流出する電流に，分流の考え方を適用して




$$I' = \frac{42}{12+\dfrac{3\times 6}{3+6}}\times\frac{3}{3+6} = 1\,\mathrm{A}$$

電流源のみの回路において, 電流源から見ると, 12 Ω, 3 Ω, 6 Ω の三つの抵抗器は並列接続であるから，分流の考え方を適用すると

$$I'' = \frac{1/6}{1/6 + 1/3 + 1/12}\times 14 = \frac{2}{2+4+1}\times 14 = 4\,\mathrm{A}$$

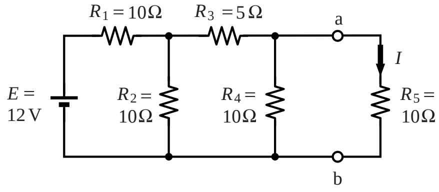
したがって

$$I = I' + I'' = 5\,\mathrm{A}$$

【6】

(a)　端子 ab 間を開放し，この端子間の合成抵抗は $R_T = 5\,\Omega$．開放のとき，$E$ から流出する電流 $I_0$ は

$$I_0 = \frac{E}{16} = \frac{3}{4}\,\mathrm{A}$$



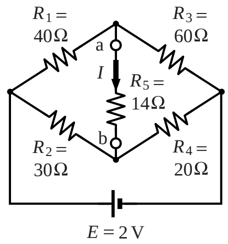

これより，$R_4$ に流れる電流 $I'$ は

$$I' = \frac{10}{10+15} \times I_0 = \frac{3}{10}\,\mathrm{A}$$

これより，ab 間の電圧は $V_{ab} = I' \times R_4 = 3\,\mathrm{V}$．テブナンの定理より

$$I = \frac{V_{ab}}{R_T + 10} = \frac{3}{15} = 0.2\,\mathrm{A}$$

(b) ab 間を開放にして，電源の－極を基準の電位として考える．このとき，点 a, b の電圧 $V_a$, $V_b$ は




$$V_a = \frac{60}{40+60} \times 2 = 1.2\,\mathrm{V}$$

$$V_b = \frac{20}{30+20} \times 2 = 0.8\,\mathrm{V}$$

$$\therefore\ V_{ab} = V_a - V_b = 0.4\,\mathrm{V}$$

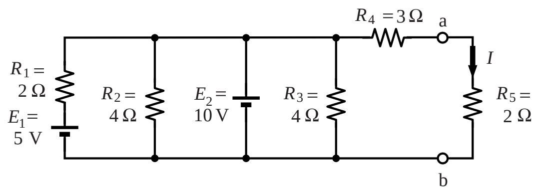
次に，合成抵抗 $R_T$ は

$$R_T = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{40 \times 60}{40+60} + \frac{30 \times 20}{30+20} = 24 + 12 = 36\,\Omega$$

テブナンの定理より

$$I = \frac{V_{ab}}{R_T + 14} = 8\,\mathrm{mA}$$

(c) ab 間を開放にしたときの合成抵抗 $R_T$ および電圧 $V_{ab}$ は計算するまでもなく，それぞれ，3 Ω, 10 V であるから，テブナンの定理より

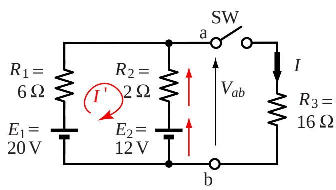



$$I = \frac{V_{ab}}{R_T + 2} = 2\,\mathrm{A}$$

【7】

図のように，ループ電流 $I'$ をとると，$I' = 1\,\mathrm{A}$．これより

$$V_{ab} = E_2 + I' \times R_2 = 14\ \mathrm{V}$$




また

$$R_T = \frac{6 \times 2}{6+2} = \frac{3}{2}\,\Omega$$

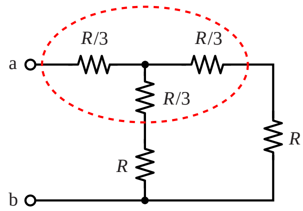
これらを用いて，テブナンの定理より

$$I = \frac{V_{ab}}{R_T + R_3} = \frac{14}{3/2 + 16} = \frac{4}{5}\,\mathrm{A}$$

$$\therefore\ V'_{ab} = I \times R_3 = 12.8\,\mathrm{V}$$

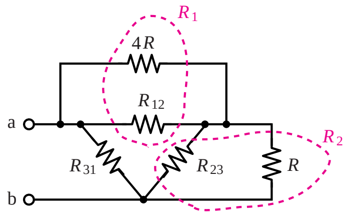
【8】

(a)　右図のように，Δ→Y 変換を行う．これより合成抵抗は




$$R_{ab}=\frac{R}{3}+\frac{\frac{4}{3}R\times\frac{4}{3}R}{\frac{4}{3}R+\frac{4}{3}R}=R$$

(b)　右図のように Y→Δ 変換を行う．この回路図において




$$R_{12}=2R+2R+\frac{2R\times 2R}{0.5R}=12R$$

$$R_{23}=2R+0.5R+\frac{2R\times 0.5R}{2R}=3R$$

$$R_{31}=2R+0.5R+\frac{2R\times 0.5R}{2R}=3R$$

これを用いて，図の $R_1$, $R_2$ を計算すると

$$R_1=\frac{12R\times 4R}{12R+4R}=3R$$

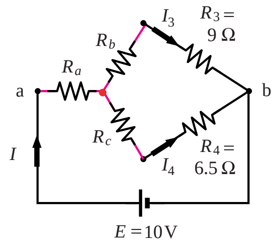
$$R_2=\frac{3R\times R}{3R+R}=\frac{3}{4}R$$

これより，合成抵抗は

$$\frac{\left(3R+\frac{3}{4}R\right)\times 3R}{\left(3R+\frac{3}{4}R\right)+3R}=\frac{5}{3}R$$

【9】

右図のように，$R_1$, $R_2$, $R_5$ の Δ 結線を Y 結線に変換する．このとき




$$R_a=\frac{10\times 15}{10+15+25}=3\,\Omega\ ,\quad R_b=\frac{10\times 25}{10+15+25}=5\,\Omega\ ,\quad R_c=\frac{15\times 25}{10+15+25}=7.5\,\Omega$$

これより，合成抵抗 $R_T$ は

$$R_T=3+\frac{(5+9)\times(7.5+6.5)}{(5+9)+(7.5+6.5)}=10\,\Omega \qquad \therefore I=\frac{10}{10}=1\,\mathrm{A}\ ,\quad I_3=I_4=0.5\,\mathrm{A}$$

$R_5$ の抵抗器にかかる電圧 $V_5$ は

$$V_5=R_3I_3-R_4I_4=1.25\ \mathrm{V}$$

よって

$$I_5=\frac{V_5}{R_5}=0.05\,\mathrm{A}$$

$$I_1=I_3+I_5=0.55\mathrm{A}$$

$$I_2=I_4-I_5=0.45\mathrm{A}$$

**【10】**

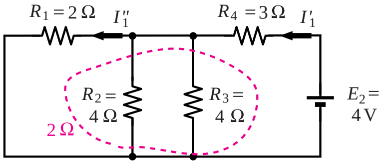
問題の回路図をブリッジ回路として見ると，平衡しているから，中央の抵抗10 Ωには電流が流れない．したがって，端子 ab 間の合成抵抗は

$$R=\frac{(5+10)\times(10+20)}{(5+10)+(10+20)}=10\ \Omega$$

$$\therefore\ I=\frac{E}{R}=6\ \mathrm{A}$$

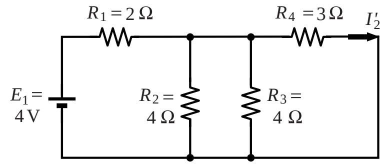
**【11】**

二つの電源の大きさ，極性の方向が同じであるから，重ね合せの定理と可逆定理の適用を試みる．まず，右図のように，$E_1$ の電源をはずして短絡する．$E_2$ の電源から見た合成抵抗を求めると（4 Ω の並列は 2 Ω であることを利用）




$$R=3+\frac{2\times2}{2+2}=4\,\Omega$$

したがって，$E_2$ から流出する電流は $I_1'=1$ A．この電流が 2 Ω の抵抗器に分流すると




$$I_1''=\frac{2}{2+2}\times I_1'=0.5\ \mathrm{A}$$

が流れる．

次に，右の下の回路図を考える．可逆定理より（流れる方向に注意）

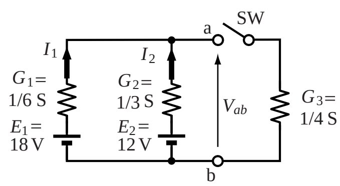
$$I_2'=I_1''=0.5\ \mathrm{A}$$

となる．以上の電流を用いて重ね合せの定理を適用すると

$$I=I_1'-I_2'=0.5\mathrm{A}$$

**【12】**

右図において，端子 ab を短絡したときに，流れる電流 $I_1$, $I_2$ を求めると




$$I_1=G_1E_1=\frac{1}{6}\times18=3\ \mathrm{A}$$

$$I_2=G_2E_2=\frac{1}{3}\times12=4\ \mathrm{A}$$

これより，短絡した端子 ab 間を流れる電流は

$$I_{ab}=I_1+I_2=7\ \mathrm{A}$$

また，合成コンダクタンスは

$$G=G_1+G_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ \mathrm{S}$$

以上の値を用いて，ノルトンの定理を適用すると

$$V_{ab}=\frac{I_{ab}}{G+G_3}=\frac{7}{1/2+1/4}=\frac{28}{3}\approx9.33\ \mathrm{V}$$

【13】

コンダクタンス $G_3$ の抵抗器がある枝に $E_3=0$ の電圧源を挿入すると，ミルマンの定理の式を直接適用できる．すなわち

$$V_{ab}=\frac{\sum_i E_iG_i}{\sum_i G_i}=\frac{18\times 1/6+12\times 1/3+0\times 1/4}{1/6+1/3+1/4}=\frac{28}{3}\ \mathrm{V}$$

よって，$G_3$ に流れる電流は

$$G_3\times V_{ab}=\frac{1}{4}\times\frac{28}{3}=\frac{7}{3}\approx 2.33\ \ \mathrm{A}$$

【14】

右図(b)の回路が図(a)のように抵抗が変化（$R_3\rightarrow R_3$+$R_4$）したと考えて補償の定理を適用する．

初めに，図(b)において，端子 ab 間を短絡にしたときに流れる電流 $I'$ はを求める．このため，電源から出る電流 $I_0'$ を求めると

$$I_0'=\frac{E}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=\frac{10}{22/3}=\frac{15}{11}\ \mathrm{A}$$

これより

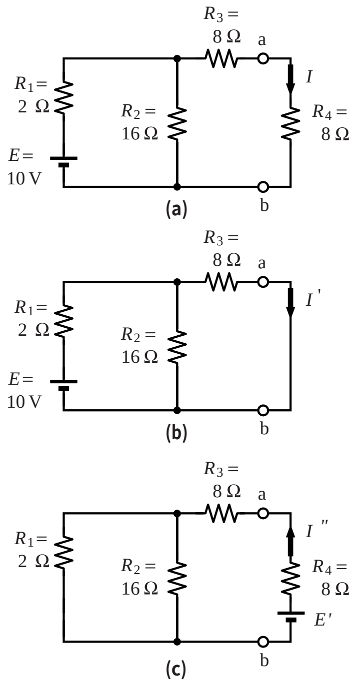
$$I'=I_0'\times\frac{R_2}{R_2+R_3}=\frac{10}{11}\ \mathrm{A}$$

次に，図(c)を見て，電流の変化分 $I''$ は，補償起電力を $E'=R_4I'$ とすると次のようになる．

$$I''=\frac{E'}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3+R_4}=\frac{9}{20}I'$$

よって，求める電流 $I$ は

$$I=I'-I''=\frac{10}{11}\left(1-\frac{9}{20}\right)=0.5\ \mathrm{A}$$




【15】

問題の回路図は, 右図(a)である. この図を見ると，$R_1=1\Omega$ のとき, ブリッジは平衡しているから，$R_L$ の抵抗器に電流は流れない．したがって，図(a)に示す電流 $I'$ は

$$I'=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{E}{2}=\frac{E}{4}\ \ [\mathrm{A}]$$

補償定理により，図(b)のように $E$ を短絡して，$R_1=1\rightarrow 1+\Delta R$ として，電源 $E_0$ を挿入する．この大きさは

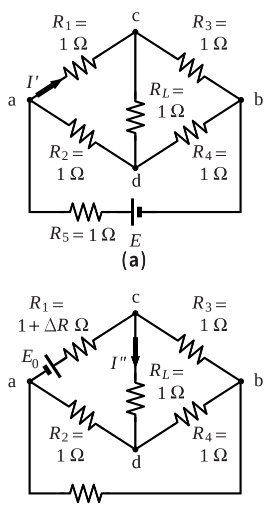
$$E_0=\Delta R\times I'=\frac{\Delta R\times E}{4}\ \ [\mathrm{V}]$$

である．図(b)の 4 本の枝 a - b, a - d, c - b, c - d もブリッジを形成し，これは平衡しているから，b - d 間に電流は流れない．したがって，$R_L$ を流れる電流 $I''$ は

$$I''=\frac{1}{2}\cdot\frac{E'}{2+\Delta R}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+\Delta R}\cdot\frac{\Delta R\times E}{4}\ \ [\mathrm{V}]$$

よって，不平衡のときの電圧 $V_{cd}$ は

$$V_{cd}=R_LI''=\frac{\Delta R}{8(2+\Delta R)}E\ \ [\mathrm{V}]$$



# 3章　正弦波交流

**【1】**

最大値 200 V，　ピークピーク値 400 V，実効値 $200/\sqrt{2}$ [V]，平均値 $400/\pi$ [V]，周波数 50 Hz，角周波数 $100\pi$ [rad/s]，位相角 $-\pi/6$ [rad]，$t=12.5$ [s]のときの位相 $(1250\pi-\pi/6)=-\pi/6$ [rad].

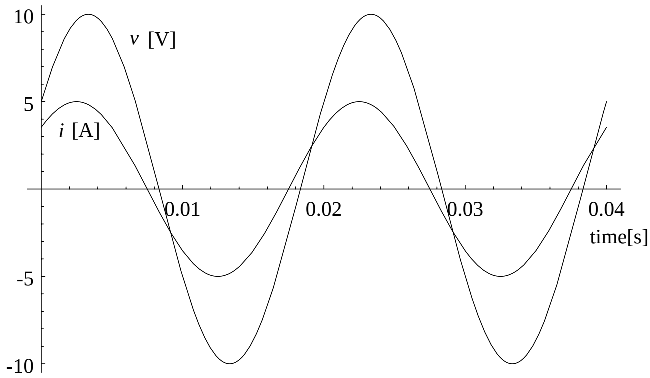
**【2】**

直交形式　$E=25\sqrt{6}+j25\sqrt{2}$ [V]　　　極形式 $E=\dfrac{100}{\sqrt{2}}\angle\dfrac{\pi}{6}$ [V]

瞬時値形式　$i=100\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\dfrac{5\pi}{12}\right)$ [A]

**【3】**

$v$ と $i$ のグラフを右図に示す．
$i$ のほうが $\pi/12$ [rad]進んでいる．




**【4】**

$v_1$, $v_2$ とも最大値は40 Vである．周期 $T$ = 2 ms，周波数 $f$ = 500 Hz，$\omega = 10^3\pi$ [rad/s]．図 P1 のグラフより，$v_2$ のほうが $v_1$ よりも 400 $\mu$s 遅れている．これに相当する角度は

$$2\text{ ms}:\ 400\ \mu\text{s} = 2\pi[\text{rad}]\ :\ x[\text{rad}]$$
$$\therefore\ x=0.4\pi[\text{rad}]$$

以上より

$$v_1 = 40\sin\left(10^3\pi t\right)$$
$$v_2 = 40\sin\left(10^3\pi t-0.4\pi\right)$$

**【5】**

$f$ = 200 Hz であるから，周期 $T$ = 1/200 = 5 ms．これが $2\pi$ [rad]に相当する．すなわち，位相差に相当する時間を $x$ とおくと

$$2\pi : 0.4\pi = 5\text{ ms} :\ x\ [\text{ms}]$$
$$\therefore\ x=1\ \text{ms}$$

**【6】**

(i) 一方が最大値に達した後に他方が最大値に達するまでの時間を $x$ とおくと

$$360°\ :\ 15° = 20\ \text{ms}\ :\ x\ [\text{ms}]$$
$$\therefore\ x=\frac{300}{360}\approx 0.83\,\text{ms}$$

(ii) $x$ = 1/1440 ≈ 0.69 ms

(iii) $x$ = 1/360 ≈ 41.7 $\mu$s

【7】

瞬時値形式，極形式，直交形式を順に示す.

$$v = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\ \text{[V]}$$
$$V = 100\angle 30^\circ\ \text{[V]}$$
$$V = 50\sqrt{3} + j50\ \text{[V]}$$

【8】

$I$ の実効値と位相角を求めると

$$|I| = 10\angle\frac{\pi}{6}$$

これより，瞬時値形式は

$$i = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

【9】

$V$ を極形式で表現すると

$$V = 50 + j50\sqrt{3} = 100\angle 60^\circ$$

題意にある角度分だけ進めると

| | |
|---|---|
| 30°進み | $V = 100\angle 90^\circ$ |
| 45°進み | $V = 100\angle 105^\circ$ |
| 90°進み | $V = 100\angle 150^\circ$ |
| 120°進み | $V = 100\angle 180^\circ = -100$ |

【10】

(i) 位相差は 0

(ii) $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin\omega t$ とおけるから，位相差は $\pi/6$ [rad] = 30°

(iii) $V = 20\sqrt{3} + j20 = 40\angle\frac{\pi}{6}$，$I = 1 - j = \sqrt{2}\angle\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ より，位相差は $5\pi/12$ [rad] = 75°

(iv) 60°

【11】

$e_1, e_2$ を直交表現すると

$$E_1 = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\angle\frac{\pi}{6} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 50\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$
$$E_2 = \frac{50}{\sqrt{2}}\angle\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 25\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\therefore\ E = E_1 + E_2 \approx 127.48\angle 13.898^\circ$$

これより

$$e = 127.48\sqrt{2}\sin(\omega t + 13.898^\circ)$$

【12】

$i, i_1, i_2$ の複素数表現をそれぞれ $I, I_1, I_2$ とおく．題意の回路より

$$I_2 = I - I_1$$

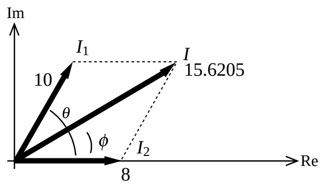
ここで

$$I = 10\ ,\quad I_1 = \frac{20}{\sqrt{2}}\angle\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 10 - j10$$

これらより，$I_2 = j10$ A.

【13】

右図を参照して




$$I^2 = \left(I_2 + I_1\cos\theta\right)^2 + \left(I_1\sin\theta\right)^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2} = 0.5$$

$$\theta = 60°$$

これより

$$\phi = \sin^{-1}\frac{I_1\sin\theta}{I} = \sin^{-1}\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{15.6205} \approx 33.67°$$

$I_1$ を基準とした $I$ の位相は

$$-(\theta - \phi) \approx -26.33°$$

# 4章　交流回路素子

**【1】**

　次のようにリアクタンス

$$X_L=\omega L,\ X_C=\frac{1}{\omega C}$$

をおくと，ab 間のインピーダンスは

$$Z=jX_L+\frac{-jRX_C}{R-jX_C}$$

この式に，$RLC$素子の値と $\omega=2\pi f$ の $f$の値を代入して計算する．

$f_1=\dfrac{500}{\pi}$ [Hz]のとき

$$Z=20-j38[\Omega]$$
$$|Z|=2\sqrt{461}\approx 42.94\,\Omega$$
$$\theta\approx -62.2°$$

これは，容量性インピーダンスである．

$f_2=\dfrac{2500}{\pi}$ [Hz]のとき

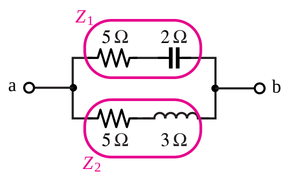
$$Z\approx 0.99+j0.099[\Omega]$$
$$|Z|=\frac{10}{\sqrt{101}}\approx 1\Omega$$
$$\theta\approx 5.71°$$

これは，誘導性インピーダンスである．

**【2】**

(a) $Z=2+\dfrac{(5)\times(j5)}{(5)+(j5)}=2+\dfrac{j25\times(5-j5)}{5^2+5^2}=4.5+j2.5\ [\Omega]$

(b) 右図のように $Z_1=5-j2$，$Z_2=5+j3$ とおくと




$$Z=\frac{Z_1\times Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(5-j2)\times(5+j3)}{10+j}$$
$$=\frac{(5-j2)\times(5+j3)\times(10-j)}{10^2+1^2}\approx 3.12+j0.188\ [\Omega]$$

(c) $Y=j\dfrac{1}{4}+j\dfrac{1}{2}-j\dfrac{1}{3}=j\dfrac{5}{12}$ [S]

**【3】**

$$
\begin{aligned}
V &= ZI \\
&= (9+j12)(4+j3) = j75 \text{ [V]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arg I &= \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ \\
\arg V &= 90^\circ
\end{aligned}
$$

これより，$V$のほうが53.1 ° 進み.
このように，$V$と$I$の位相角を求めなくとも，$Z$のインピーダンス角

$$
\arg Z = \tan^{-1}\frac{12}{9} \approx 53.1^\circ
$$

が$V$と$I$の位相差に相当する.

**【4】**

$$
I = 5 + j5 = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ [A]}
$$

$$
\therefore\ \ Z = \frac{V}{I} = \frac{100\angle(-30^\circ)}{5\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 10\sqrt{2}\angle(-75^\circ) \text{ [}\Omega\text{]}
$$

**【5】**

(i) $I_1$, $I_2$を求めると

$$
I_1 = \frac{E}{R_1} = 5 \text{ A}
$$

$$
I_2 = \frac{E}{3-j4} = \frac{50(3+j4)}{3^2+4^2} = 2(3+j4)
$$

$$
\therefore\ \ I = I_1 + I_2 = 11 + j8 \text{ [A]}
$$

(ii) 回路のアドミタンスは

$$
Y = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 - jX} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3-j4} = \frac{1}{50}(11+j8) \text{ [S]}
$$

$$
\therefore\ \ I = YV = \frac{1}{50}(11+j8) \times 50 = 11 + j8 \text{ [A]}
$$

この$I$に対して，分流の考え方を適用して$I_1$, $I_2$を求める．すなわち

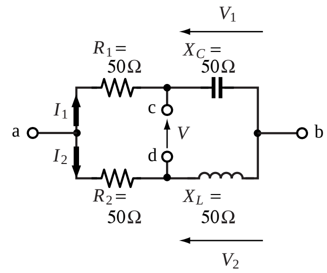
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{R_2 - jX}{R_1 + (R_2 - jX)} \times I = 5 \text{ A} \\
I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + (R_2 - jX)} \times I = 6 + j8 \text{ [A]}
\end{aligned}
$$

## 【6】

$$I = |I_1| - j|I_2| + j|I_3| = 15 - j10 + j2 = 15 - j8 \ [\mathrm{A}]$$
$$|I| = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \ \mathrm{A}$$
$$\cos\theta = \frac{15}{|I|} \approx 0.88$$

## 【7】

(a) 右図において，$I_1, I_2$ を求めると



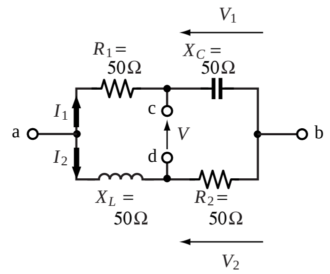

$$I_1 = \frac{100}{50 - j50} = 1 + j$$
$$I_2 = \frac{100}{50 + j50} = 1 - j$$

これより

$$V_1 = I_1 \times (-j50) = 50 - j50$$
$$V_2 = I_2 \times (j50) = 50 + j50$$

$$\therefore \ V_{cd} = V_1 - V_2 = -j100 = 100\angle(-90°)$$

(b) 右図において，$I_1, I_2$ を求めると




$$I_1 = 1 + j$$
$$I_2 = 1 - j$$

これより

$$V_1 = I_1 \times (-j50) = 50 - j50$$
$$V_2 = I_2 \times (50) = 50 - j50$$
$$\therefore \ V_{cd} = V_1 - V_2 = 0$$

## 【8】

電源から見た回路のインピーダンスは

$$Z = 10 + j10 + 10 - j30 = 20 - j20 \ [\Omega]$$

これより，回路に流れる電流は

$$I = \frac{100}{Z} = \frac{5}{2}(1 + j) \ [\mathrm{A}]$$

求める $V_{ab}$ は，$X_L$ のインダクタと $R_2$ の抵抗器の両端の電圧であるから

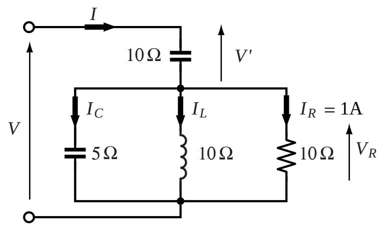
$$V_{ab} = I \times (R_2 + jX_L) = j50 = 50\angle 90°$$

【9】

$V_R$を求めると

$$V_R = I_R \times 10 = 10 \ \ \mathrm{V}$$

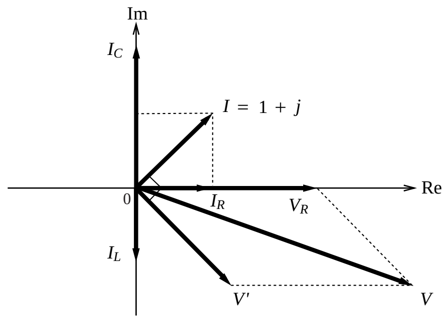
これより，各電流は




$$|I_L| = \frac{V_R}{10} = 1 \ \ \mathrm{A}$$

$$|I_C| = \frac{V_R}{5} = 2 \ \ \mathrm{A}$$

$$\therefore \ \ I = I_R + jI_C - jI_L = 1 + j \ \ \mathrm{A}$$




10 Ωのキャパシタの両端に発生する電圧を$V'$とすると

$$V' = I \times (-j10) = 10 - j10 \ [\mathrm{V}]$$

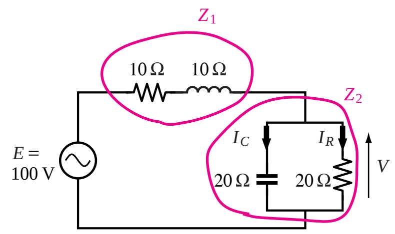
したがって

$$V = V' + V_R = 20 - j10 = 10\sqrt{5}\angle(-26.6°) \ [\mathrm{V}]$$

ベクトル図を右に示す．

【10】

右図のように二つのインピーダンス$Z_1$, $Z_2$を考えると



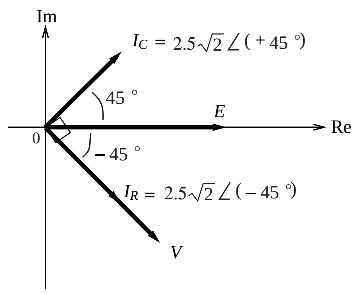

$$Z_1 = 10 + j10$$

$$Z_2 = \frac{20 \times (-j20)}{20 + (-j20)} = 10 - j10 \ [\Omega]$$

分圧の考え方を導入して

$$V = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \times E$$

$$= \frac{10 - j10}{20} \times 100 = 50 - j50 = 50\sqrt{2}\angle(-45°)$$




$$I_R = \frac{V}{20} = 2.5\sqrt{2}\angle(-45°)$$

$$I_C = \frac{V}{-j20} = 2.5\sqrt{2}\angle 45°$$

ベクトル図について，初めに$E$を基準ベクトルとして描き，次に$V$を描く．この$V$に沿って，$I_R$を描く．これから90°正回転させて$I_C$を描く．

【11】

$$Y = \frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{4 - j3} = \frac{1}{50}(16 - j3) \ [\mathrm{S}]$$

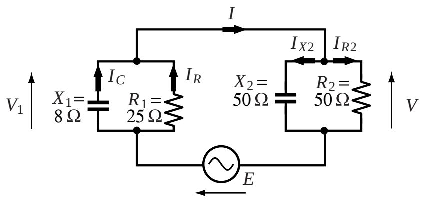
$$I = YV$$

$$= \frac{1}{50}(16 - j3) \times 50 = 16 - j3$$

$$\approx 16.3\angle(-10.6°) \ [\mathrm{A}]$$

**【12】**

右図のように，電流と電圧を定める．このとき




$$I_{R2} = \frac{200}{50} = 4\ [\mathrm{A}]$$

$$I_{X2} = \frac{200}{-j50} = j4\ [\mathrm{A}]$$

これより

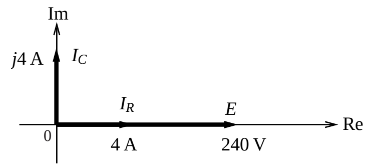
$$I = I_{R2} + I_{X2} = 4 + j4\ [\mathrm{A}]$$

となる．分流の考え方を導入して

$$I_R = \frac{-jX_1}{R_1 - jX_1} \times I = 4\ [\mathrm{A}]$$

$$I_C = \frac{R_1}{R_1 - jX_1} \times I = j4\ [\mathrm{A}]$$

この結果から




$$V_1 = I_R R_1 = 40\ \ \mathrm{V}$$

$$\therefore\ E = V_1 + V = 240\ \ \mathrm{V}$$

## 5 章　交流回路の基礎技術

**【1】**

電圧と電流の位相差が 30 ° であるから，力率は $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，また，無効率は $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

有効電力　$P = |V||I|\cos\theta = 100 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3}$  W

無効電力　$Q = |V||I|\sin\theta = 100 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = 250$  var

皮相電力　$S = |V||I| = 500$  V·A

**【2】**

この回路のインピーダンス，その大きさ，インピーダンス角は

$$Z = 50 + j50\ [\Omega],\quad |Z| = 50\sqrt{2}\ [\Omega],\quad \theta = \tan^{-1}\frac{50}{50} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

これより

力率　$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

有効電力　$P = |V||I|\cos\theta = |V|\dfrac{|V|}{|Z|}\cos\theta = \dfrac{100^2}{50\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 100$  W

**【3】**

この回路のインピーダンス，その大きさ，インピーダンス角は

$$Z = \frac{50 \times (j50)}{50 + j50} = 25 + j25\ [\Omega],\quad |Z| = 25\sqrt{2}\ [\Omega],\quad \theta = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

これより

力率　$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

有効電力　$P = |V||I|\cos\theta = |V|\dfrac{|V|}{|Z|}\cos\theta = \dfrac{100^2}{25\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 200$  W

別解

有効電力は，$R$ 素子のみで発生するから，$R$ 素子に流れる電流を $I_R$ とおくと

$$P = |I_R|^2 R = \left(\frac{100}{50}\right)^2 \times 50 = 200\ \text{W}$$

**【4】**

$P=|V||I|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{P}{|V||I|}=\frac{3200}{200\times 20}=0.8$$

$\cos\theta=\dfrac{P}{S}$ より

$$S=\frac{P}{\cos\theta}=\frac{3200}{0.8}=4000\ \ \mathrm{V\cdot A}$$

**【5】**

次式の関係

$$P=|V||I|\cos\theta=\frac{|V|^2}{|Z|}\cos\theta$$

を見ると，題意から, $|Z|$, $\cos\theta$ は変わらず, $|V|$が 0.8 倍になる．$P$ は，本問題において, $|V|$の 2 乗に比例するから，求める答えは

$$500\times 0.8^2=320\ \ \mathrm{W}$$

**【6】**

初めに複素電力を求める．すなわち，$V$ の共役複素数と $I$ の乗算を求めると

$$\overline{V}I=(110-j40)(30+j52)=5380+j4520$$

これより

$$P=5380\ \mathrm{W}\,,\ Q=4520\ \mathrm{var}\,,\quad S=\sqrt{P^2+Q^2}\approx 7027\ \ \mathrm{V\cdot A}$$

$$\cos\theta=\frac{P}{S}\approx 0.766$$

なお，複素電力の虚部が正であるから，進み力率である．もし，本問において，$V$ と $I$ の位相差を求める場合には

$$\arg V\approx 19.98^\circ$$
$$\arg I\approx 60.02^\circ$$

を計算しなければならず，上記の電力を用いた計算より若干複雑である．

**【7】**

$P_c=\overline{V}I=1600+j1200$ かつ $V=100$ より

$$I=16+j12=\frac{V}{Z}$$
$$\therefore\ \ Z=\frac{V}{I}=\frac{100}{16+j12}=4-j3\ [\Omega]$$

【8】

$P=|V||I|\cos\theta$ より

$$|V||I|=\frac{P}{\cos\theta}=\frac{500\times10^3}{0.866}$$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-0.866^2}\approx0.5$$

以上より

$$Q=|V||I|\sin\theta=\frac{500\times10^3}{0.866}\times0.5\approx286\ \ \text{kvar}$$

【9】

抵抗器とリアクタに流れる電流をそれぞれ $I_R, I_X$ とおくと

$$I_R=\frac{V}{R}$$
$$I_X=\frac{V}{jX}=-j\frac{V}{X}$$
$$\therefore\ \ I=I_R+I_X=\frac{V}{R}-j\frac{V}{X}$$

有効電力は抵抗器のみで発生するから

$$\therefore\ \ R=\frac{|V|^2}{P}=\frac{600^2}{9000}=40\ \ \Omega$$
$$\therefore\ \ I_R=\frac{600}{40}=15\ \ \text{A}$$

また，$|I|=\sqrt{|I_R|^2+|I_X|^2}$ かつ $|I|=25$ より

$$|I_X|=\sqrt{|I|^2-|I_R|^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20\ \ \text{A}$$

次に

$$X=\frac{|V|}{|I_X|}=\frac{600}{20}=30\ \ \Omega$$

**【10】**

$P = |V||I|\cos\theta$ より

$$|I| = \frac{P}{|V|\cos\theta} = \frac{3200}{100 \times 0.8} = 40 \ \ \mathrm{A}$$

$$|Z| = \frac{|V|}{|I|} = \frac{100}{40} = 2.5 \ \ \Omega$$

$\cos\theta = \dfrac{R}{|Z|}$ より

$$R = |Z|\cos\theta = 2.5 \times 0.8 = 2 \ \ \Omega$$

$C$ のリアクタンスを $X_C$ とおいて，$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ より

$$X_C = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5\,\Omega$$

$X_C = \dfrac{1}{2\pi f C}$ より

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 1.5} \approx 1.77 \ \ \mathrm{mF}$$

**【11】**

回路のインピーダンスは $Z = 4 + j3$ [Ω]であり，その大きさは $|Z| = 5\,\Omega$．したがって，

$$|I| = \frac{120}{|Z|} = 24\,\mathrm{A}$$

これより

$$P = |I|^2 R = 24^2 \times 4 = 2304 \ \ \mathrm{W}$$

$$W = Pt = 2304 \times \frac{80}{60} = 3072 \ \ \ \mathrm{W \cdot h}$$

**【12】**

抵抗器で消費される電力は

$$P = |I|^2 R = \left(\frac{50}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right)^2 \times 4 = 400 \ \ \mathrm{W}$$

$2\,\mathrm{MJ} = 2 \times 10^6 \ \ \mathrm{W \cdot s}$ の関係を考慮して，この抵抗器で消費する電力量が $t$ [h]で 2 MJ になるとすると

$$400 \times 3600\, t = 2 \times 10^6$$

$$\therefore \ \ t = \frac{25}{18} \approx 1.39 \ \ \mathrm{h}$$

**【13】**

$P$ と $\cos\theta$ が与えられているから， $S$ と $\sin\theta$ を求めれば $Q$ が求められる．これより，電力量と無効電力量を求めることができる．すなわち

$$S=\frac{P}{\cos\theta}=\frac{800\times10^3}{0.8}=10^6\ ,\ \sin\theta=0.6$$

したがって

$$Q=S\times\sin\theta=10^6\times0.6=600\ \ \mathrm{k\,var}$$

45 分は 3/4 h に相当するから

$$\text{電力量}=800\times\frac{3}{4}=600\ \ \mathrm{kWh}$$

$$\text{無効電力量}=600\times\frac{3}{4}=450\ \ \mathrm{kvar\cdot h}$$

**【14】**

各負荷の電流の大きさを求めると

$$|I_1|=\frac{P_1}{|V_1|\cos\theta_1}=\frac{240}{300\times0.8}=1\ \ \mathrm{A}$$

$$|I_2|=\frac{P_2}{|V_2|\cos\theta_2}=\frac{120}{300\times0.6}=\frac{2}{3}\ \ \mathrm{A}$$

また, それぞれの無効率は $\sin\theta_1=0.6$，$\sin\theta_2=0.8$ であり, 両方の負荷とも遅れ力率であることを考慮すると

$$I_1=|I_1|(\cos\theta_1-j\sin\theta_1)=0.8-j0.6$$

$$I_2=|I_2|(\cos\theta_2-j\sin\theta_2)=\frac{2}{3}(0.6-j0.8)$$

これより

$$I=I_1+I_2\approx1.2-j1.13\ [\mathrm{A}]$$

$$\cos\theta=\frac{1.2}{|I|}\approx0.73$$

【15】

$$Z = R + jX$$
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

とおいて

$R = R_1$のとき

$$\cos\theta_1 = \frac{R_1}{|Z_1|} = 0.8\ ,\quad \sin\theta_1 = \frac{X}{|Z_1|} = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} = 0.6$$

$R = R_2$のとき

$$\cos\theta_2 = \frac{R_2}{|Z_2|} = 0.6\ ,\quad \sin\theta_2 = \frac{X}{|Z_2|} = \sqrt{1-\cos^2\theta_2} = 0.8$$

これらより

$$\frac{X}{R_1} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{X}{R_2} = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{X/R_2}{X/R_1} = \frac{4/3}{3/4} = \frac{16}{9}$$

【16】

図の回路では，抵抗器のみで電力は消費され，無効電力はインダクタのみで発生することを考慮すると

$$P = \frac{V^2}{36} = 400\ \ \mathrm{W}$$
$$Q = \frac{V^2}{48} = 300\ \ \mathrm{var}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 500\ \ \mathrm{V\cdot A}$$

したがって

$$\cos\theta = \frac{P}{S} = 0.8$$
$$|I| = \frac{P}{|V|\cos\theta} = \frac{400}{120\times 0.8} \approx 4.17\ \ \mathrm{A}$$

次に，力率を100%にするにはキャパシタのリアクタンス$X_C$をインダクタのリアクタンスに等しくすればよい．すなわち，$X_C = 48\ \ \Omega$である．このとき，回路の合成インピーダンスは$R$分のみになるから，このとき回路に流れる電流の大きさは

$$|I| = \frac{V}{R} \approx 3.33\ \ \mathrm{A}$$

**【17】**

キャパシタ接続前の力率は$\cos\theta = 0.6$，無効率は$\sin\theta = 0.8$である．このとき，負荷の有効電力と無効電力はそれぞれ

$$P = 20000 \times 0.6 = 12000 \ \ \text{kW}$$
$$Q = 20000 \times 0.8 = 16000 \ \ \text{kvar}$$

次に，負荷と並列に 11000 kvar のキャパシタを接続すると，無効電力は

$$Q' = 16000 - 11000 = 5000 \ \ \text{kvar}$$

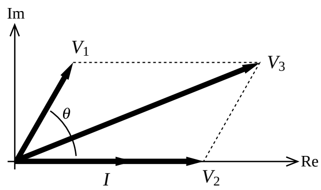
したがって，回路全体の皮相電力は

$$\sqrt{12000^2 + 5000^2} = 13000 \ \ \text{kVA}$$

備考：キャパシタの容量は，電気回路理論において，[F]または$[\Omega]$である．一方，現場において，回路の負荷を有効電力，無効電力の値で表現することがある．この場合，電圧が一定の場合とみなせる回路において，[var]でリアクタンスの値を表現することがある．

**【18】**

題意に基づいて描いた右のベクトル図を考える．問題の回路図と右のベクトル図より，負荷の消費電力は




$$P = V_1 I \cos\theta \qquad (1)$$

である．また，次の関係式がいえる．

$$V_3^2 = \left(V_2 + V_1\cos\theta\right)^2 + \left(V_1\sin\theta\right)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta \qquad (2)$$

$$V_2 = IR \qquad (3)$$

式(2)より

$$\cos\theta = \frac{V_3^2 - V_1^2 - V_2^2}{2V_1V_2} \qquad (4)$$

式(3)より

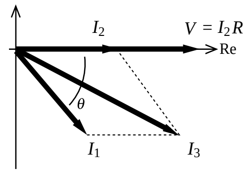
$$I = \frac{V_2}{R} \qquad (5)$$

式(4),(5)を式(1)に代入すると，次の結果を得る．

$$P = \frac{1}{2R}\left(V_3^2 - V_1^2 - V_2^2\right)$$

**【19】**

題意に基づいて描いた右のベクトル図を考える．問題の回路図において，抵抗器の両端の電圧を$V = RI_2$とおき，この図と右のベクトル図より，負荷の消費電力は




$$P = |V||I_1|\cos\theta \qquad (1)$$

である．また，次の関係式がいえる．

$$I_3^2 = \left(I_2 + I_1\cos\theta\right)^2 + \left(I_1\sin\theta\right)^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\theta$$

$$\therefore \ \cos\theta = \frac{I_3^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2}$$

$$V = I_2R$$

これらを式(1)に代入すると，次の結果を得る．

$$P = \frac{R}{2}\left(I_3^2 - I_1^2 - I_2^2\right)$$

**【20】**

共振角周波数は

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100\times10^{-3}\times10\times10^{-6}}} = 10^3 \ \text{ rad s}$$

このとき，回路のインピーダンスは $R$ 成分のみであるから，回路に流れる電流は

$$I = \frac{8}{4} = 2 \ \text{A}$$

また

$$\left|V_C\right| = \frac{1}{\omega C} I = \frac{1}{10^3\times10^{-6}}\times2 = 2000\,\text{V}$$

**【21】**

共振時の電流を求め，これをインダクタの両端の電圧を表す式に代入すれば，共振周波数 $f$ が求まる．この方針に基づいて

$$\left|I\right| = \frac{10}{2} = 5 \ \text{A}$$

$$\left|V\right| = \omega L\left|I\right| = \omega\times10\times10^{-3}\times5 = 1000$$

これより

$$f = \frac{1000}{2\pi\times10\times10^{-3}\times5} \approx 3183 \ \text{Hz}$$

**【22】**

問題の回路における共振条件は

$$\omega L = \frac{1}{\omega\left(C_0+C\right)}\ , \quad \therefore\ \omega^2 L\left(C_0+C\right) = 1$$

この式に，$f = 6$ kHz , $f = 4$ kHz の場合を考えると

$$\omega_1^2 L\left(C_0+20\times10^{-6}\right) = 1$$

$$\omega_2^2 L\left(C_0+60\times10^{-6}\right) = 1$$

この二つの式の比を求めると

$$\frac{\omega_1^2 L\left(C_0+20\times10^{-6}\right)}{\omega_2^2 L\left(C_0+60\times10^{-6}\right)} = \frac{\left(2\pi f_1\right)^2\left(C_0+20\times10^{-6}\right)}{\left(2\pi f_2\right)^2\left(C_0+60\times10^{-6}\right)} = \frac{\left(6\times10^3\right)^2\left(C_0+20\right)}{\left(4\times10^3\right)^2\left(C_0+60\right)} = 1$$

最後の等式から

$$36\times\left(C_0+20\right) = 16\times\left(C_0+60\right)$$

$$\therefore\ C_0 = 12 \ \mu\text{F}$$

**【23】**

$X_0 = j\omega L_0$ , $X_1 = j\omega L_1$ , $X_C = -j/\omega C$ とおいて，回路の合成インピーダンスを求めると

$$Z = j\left(X_0 - \frac{X_1 X_C}{X_1 - X_C}\right) = j\frac{X_0\left(X_1 - X_C\right) - X_1 X_C}{X_1 - X_C}$$

$Z = 0$ となるのは，分子 = 0 とおいて

$$\omega^2 L_0 L_1 - \frac{L_0}{C} - \frac{L_1}{C} = 0$$
$$\omega^2 L_0 L_1 C - L_0 - L_1 = 0$$

$$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{L_0 + L_1}{L_0 L_1 C}} = \sqrt{\frac{(5+20)\times 10^{-6}}{(5\times 20\times 1)\times\left(10^{-6}\right)^3}} = 500\ \ \text{krad s}$$

**【24】**

共振曲線より，共振時の電流の大きさは$|I| = 0.5\ \ \text{A}$である．これより，$R$を求めることができる．すなわち

$$R = \frac{10}{|I|} = 20\ \ \Omega$$

また, $|I|$の $1/\sqrt{2}$ 倍となる電流の大きさを達成する周波数を図から読み取ると

$$f_1 = 382\ \ \text{Hz}\ ,\ f_2 = 414\ \ \text{Hz}$$

共振曲線より共振周波数 $f_r$ = 397.9 Hz であるから，共振曲線の鋭さ $Q$ は

$$Q = \frac{f_r}{f_2 - f_1} = \frac{397.9}{414 - 382} \approx 12.434$$

ここで，共振角周波数を $\omega_r$ とおくと

$$Q = \frac{\omega_r L}{R}$$

の関係があるから，次の結果を得る．

$$L = \frac{QR}{\omega_r} = \frac{12.434\times 20}{2\pi\times f_r} \approx 0.0995\ \ \text{H}$$

また，共振時の条件 $\omega_{\mathrm{r}}^2 LC = 1$ から

$$C = \frac{1}{\omega_{\mathrm{r}}^2 L} \approx 1.608\ \ \mu\text{F}$$

実は，図 P14 の共振曲線は $R = 20\ \Omega$ , $L = 0.1\ \ \text{H}$ , $C = 1.6\ \ \mu\text{F}$ を用いた計算結果であることを付記しておく．

【25】

平衡条件より

$$R_1(R_4 + jX_4) = jX_x \frac{-jR_3X_C}{R_3 - jX_C} = \frac{R_3X_CX_X}{R_3 - jX_C}$$
$$\therefore \; R_1(R_4 + jX_4)(R_3 - jX_C) = R_3X_CX_X$$

上式において $X_x$ を含んでいるのは実部であるから，実部に注目して

$$R_3X_CX_X = R_1(R_3R_4 + X_CX_4)$$
$$\therefore \; X_X = \frac{R_1(R_3R_4 + X_CX_4)}{R_3X_C}$$

【26】

平衡条件を求めると

$$R_1R_4 = \frac{R_3X_CX_L(R_3 + jX_C)}{R_3^2 + X_C^2}$$

を得る．この式を見ると，虚部が0とならなければならないので $X_C = 0$．しかし，このとき，実部も0となり，矛盾する．したがって，このブリッジは平衡しない．すなわち，ブリッジの素子の値をどのようにしても，電源の周波数をどのようにしても，検流計Dには電流が流れる．

【27】

二つの電力（またはエネルギー）$P_1, P_2$ を比較するときは

$$10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

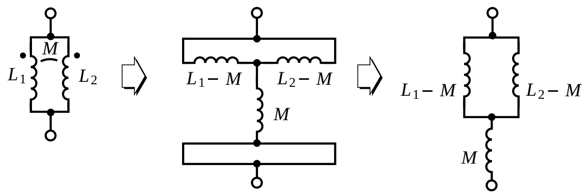
のように，係数に10がつく．電圧 $V$ のときは，この係数が20となる．すなわち

$$20\log_{10}\frac{100V}{V} = 40 \ \ \mathrm{dB}$$

# 6章　相互インダクタンス回路

**【1】**

(a) $L_1 + L_2 + 2M$ [H]　　　(b) $L_1 + L_2 - 2M$ [H]　　　(c) 問題の回路は下図と同じ．




上の右端の図より，等価インダクタンスは

$$L = \frac{(L_1 - M)\times(L_2 - M)}{(L_1 - M)+(L_2 - M)} + M = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(d) $M$ の符号を反転させて, (c)と同様にして考えると，次の結果を得る．

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

**【2】**

一次側電流を端子1から，二次側電流を端子2から流入させたとき，磁束の方向を考えれば，結果を得ることができる．すなわち

(a) $+M$　(b) $-M$　(c) $+M$

**【3】**

(i) $M = 1.6$ mH

(ii) SW が開放のとき

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 \qquad \therefore\ I_1 = \frac{V}{j\omega L_1} = -j50\ \text{A}$$

これより

$$V_2 = j\omega M I_1 = 40\ \text{V}$$

(iii) 二次側開放時の一次側から見たインピーダンスは

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 = j2\ \Omega$$

(iv) 二次側SWを閉じたときの一次側から見たインピーダンス$Z_1$を求める．そのため, 回路方程式を立てる．すなわち

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \\ 0 = -\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \end{cases}$$

これを行列表現して解くと

$$j\omega\begin{pmatrix} L_1 & -M \\ M & -L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega\left(M^2 - L_1 L_2\right)}\begin{pmatrix} -L_2 & M \\ -M & L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} \to I_1 = \frac{-L_2}{j\omega\left(M^2 - L_1 L_2\right)} V_1$$

これより

$$Z_1 = \frac{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{L_2} = j0.72\ \Omega$$

【4】

本問題のインダクタの値は, インダクタンスでなくリアクタンスで表現されていることに注意されたい. これは, $M=k\sqrt{L_1 L_2}$ の代わりに $\omega M=k\sqrt{\omega L_1\times\omega L_2}$ を考えればよい. これより

$$\omega M=k\sqrt{\omega L_1\times\omega L_2}=0.8\sqrt{40\times10}=16\ \ \Omega$$

$$\therefore\ \ Z_{ab}=50+j40+j10-2\times(j16)=50+j32\ [\Omega]$$

【5】

SW が開いているときの一次側電流を $I_{1O}$ とおくと

$$I_{1O}=\frac{V_1}{j\omega L_1}=\frac{100}{j40}=-j2.5\ \ \mathrm{A}$$

SW が閉じているときの一次側電流を $I_{1C}$ とおき, 二次側電流を $I_2$ とおくと

$$\begin{cases} j40I_{1C}-j20I_2=V_1 \\ -(j10+10)I_2+j20I_{1C}=0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$I_{1C}=\frac{5}{2}(1-j)$$

$$\therefore\ \left|I_{1C}\right|=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

以上より, $\left|I_{1O}\right|$ は $\left|I_{1C}\right|$ の 0.71 倍である.

【6】

SW が開放時の端子 ab 間のインピーダンス $Z_O$ は

$$Z_O=j800\ \ \Omega$$

SW が閉じているとき, $\omega M=0.8\sqrt{800\times200}=320\ \ \Omega$ より

$$\begin{cases} V_1=j800I_1-j320I_2 \\ 0=-(j200-j200)I_2+j320I_1 \end{cases}$$

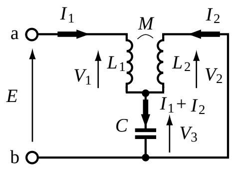
上の第 2 式において, $I_2$ の係数は 0 になるから, $I_1$ は 0 でなければならない. これは, 二次側で共振現象が現れているため, 一次側に電圧をかけても, 一次側電流が流れない. したがって, 見掛け上の端子 ab 間のインピーダンスは ∞ である. ここで, 二次側電流は

$$I_2=\frac{V_1}{-j320}$$

の値で流れていることに注意されたい.

【7】

右図のように，電圧と電流を定める．この図より




$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \end{cases}$$

$$V_1 = E - \frac{I_1 + I_2}{j\omega C}$$

$$V_2 = -\frac{I_1 + I_2}{j\omega C}$$

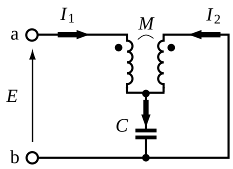
ここで，題意より $I_2 = 0$ とおくと，上の式は次となる．

$$\begin{cases} E - \dfrac{I_1}{j\omega C} = j\omega L_1 I_1 \\ -\dfrac{I_1}{j\omega C} = j\omega M I_1 \end{cases} \qquad (1)$$

式(1)の第 2 式から，$I_2 = 0$ となる条件を求められる．すなわち

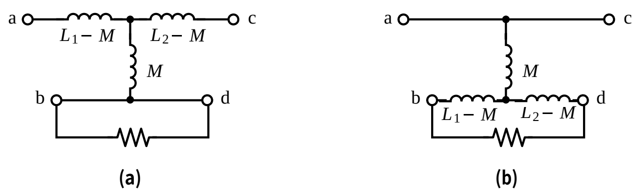
$$j\left(\omega M - \frac{1}{\omega C}\right) I_1 = 0 \qquad \therefore \ \omega M = \frac{1}{\omega C}$$

この条件を見ると，右辺は正であるから，$M > 0$ でなければならない．すなわち，問題の回路図のように電流分布があるとき，変成器は加極性である（右図参照）．




【8】

等価回路を用いて考えると，次の二つが考えられるが，どちらもうまくない．




図(a)では抵抗器が無視され，図(b)では端子 ac 間が短絡である．等価回路を用いるには，もとの変成器の回路において，端子 bd 間（または端子 ac 間）が等電位（電位が同じ．例えば短絡されている状態）でなければならず，問題の回路図はこの等電位を満たしていない．

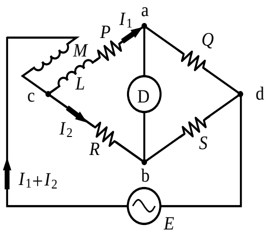
等価回路を用いなくとも，端子 a から c に向けて電流 $I$ が流れていると考え，端子 ac 間の電圧を $V$ とおけば

$$V = \left\{ j\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right) + R \right\} I$$

より，等価リアクタンスは $\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right)$ [Ω]，等価抵抗は $R$ [Ω]である．

【9】

$M$の符号は両方あるものとして，a, b点の電位が等しいとき，すなわち，検流計に電流が流れていないとき




$$\begin{cases} \pm j\omega M(I_1+I_2)+(P+j\omega L)I_1 = RI_2 & \text{（c 点を基準として考える）} \\ QI_1 = SI_2 & \text{（ab 点は同電位，これを基準として考える）} \end{cases}$$

上の第 2 式より $I_2=(Q/S)I_1$，これを第 1 式に代入して整理すると

$$\pm j\omega M\frac{S+Q}{S}+j\omega L+P=\frac{QR}{S}$$

実部，虚部同士の等式から，平衡条件は次の 2 式を同時に満足することである．

$$\begin{cases} P=\dfrac{QR}{S} \\ L=\pm M\dfrac{S+Q}{S} \end{cases}$$

この平衡条件の第 2 式より，$L$を求められる．ただし，$L$は正であるから，符号は正を採用する．したがって

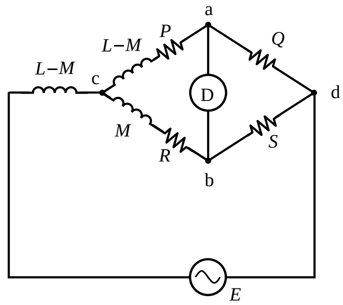
$$L=M\frac{S+Q}{S}$$

別解

右図のように等価回路を用いて考える．ただし，$M$の符号を正とした．
ブリッジの平衡条件より

$$\{P+j\omega(L-M)\}S=(R+j\omega M)Q$$

実部同士，虚部同士が等しいとおくと，上と同じ結果を得る．




【10】

一次側から見たインピーダンスを $Z_1$ とおくと，題意より

$$Z_1=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\times 300 = 1.2\times 10^3$$

$$\therefore\ \frac{n_1}{n_2}=2$$

# 7章　交流回路の発展例

**【1】**

電源と右側の抵抗器が並列であるから

$$I' = \frac{E}{50}\ \ [\mathrm{A}]$$

キルヒホッフの電流に関する法則より

$$I_0 + I = I' \qquad \therefore\ \ I = I' - I_0$$

$E = 10$ V のとき

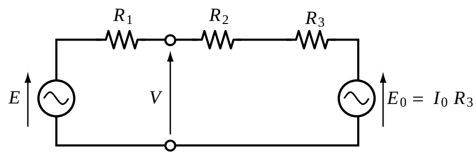
$$I = 0.2 - 0.1 = 0.1\ \ \mathrm{A}$$

$E = 2$ V のとき

$$I = 0.04 - 0.1 = -0.06\ \ \mathrm{A}$$

**【2】**

電流源を等価電圧源に変換した回路を右に示す. この回路図より, 回路に流れる電流は




$$I = \frac{E - E_0}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{E - I_0 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

これより

$$V = E - R_1 I = E - R_1 \frac{E - I_0 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

**【3】**

テブナンの定理を用いて解く．SW が開放のとき，端子 ab 間のインピーダンスは

$$Z = -j5\ \ \Omega$$

また，端子 ab 間の電圧 $V'_{ab}$ は $E$ に等しい．これらを用いて，SW を閉じたときに流れる電流 $I$ は

$$\begin{aligned} I &= \frac{V'_{ab}}{Z + (4 + j2)} \\ &= \frac{100\angle 30°}{4 - j3} \approx \frac{100\angle 30°}{5\angle(-36.87°)} = 20\angle 66.87° \end{aligned}$$

このときの端子 ab 間の電圧は

$$\begin{aligned} V_{ab} &= I \times (4 + j2) \\ &\approx 20\angle 66.87° \times 2\sqrt{5}\angle 26.57° = 50\sqrt{5}\angle 93.44° \end{aligned}$$

**【4】**

負荷のインピーダンスを

$$Z=|Z|(\cos\theta+j\sin\theta)$$

と表すことができるので，回路の合成インピーダンスを

$$Z_0=\left(R_0+|Z|\cos\theta\right)+j\left(X_0+|Z|\sin\theta\right)$$

と表現する．回路に流れる電流を$I$とおくと，負荷の両端の電圧の大きさは

$$\begin{aligned}|V|&=|Z||I|\\&=\frac{|Z||V_0|}{\sqrt{\left(R_0+|Z|\cos\theta\right)^2+\left(X_0+|Z|\sin\theta\right)^2}}=\frac{|Z||V_0|}{\sqrt{R_0^2+X_0^2+|Z|^2+2|Z|\left(R_0\cos\theta+X_0\sin\theta\right)}}\end{aligned}\qquad(1)$$

$|Z|$の大きさは一定だから，$|V|$を最小にするには上式の分母にある$\left(R_0\cos\theta+X_0\sin\theta\right)$を最大にすればよい．そこで

$$\frac{d}{d\theta}\left(R_0\cos\theta+X_0\sin\theta\right)=-R_0\sin\theta+X_0\cos\theta=0$$

とおいて，極値を求めると

$$R_0\sin\theta=X_0\cos\theta$$

$$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{X_0}{R_0}\quad,\qquad\cos\theta=\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}\quad,\qquad\sin\theta=\frac{X_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}$$

ここで

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(R_0\cos\theta+X_0\sin\theta\right)=-R_0\cos\theta-X_0\sin\theta=-\left(R_0\cos\theta+X_0\sin\theta\right)<0\qquad0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

であるから，上の極値は最小値を与えることがわかる．

これより

$$\begin{aligned}Z&=|Z|(\cos\theta+j\sin\theta)\\&=|Z|\left(\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}+j\frac{X_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ R=|Z|\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}\ [\Omega]\ ,\ X=|Z|\frac{X_0}{\sqrt{R_0^2+X_0^2}}\ [\Omega]$$

このときの電圧は，上の結果を式(1)に代入して

$$|V|=\frac{|Z||V_0|}{\sqrt{R_0^2+X_0^2+|Z|^2+2|Z|\left(R_0^2+X_0^2\right)}}=\frac{|Z||V_0|}{|Z|+\sqrt{R_0^2+X_0^2}}\ \ [\mathrm{V}]$$

【5】

問題の回路図において，電流の絶対値が等しいということは，二つのインピーダンスが等しいことである．すなわち

$$R_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{1}$$

次に，力率 0.8 の条件を考えるため，合成インピーダンス $Z$ を求めると

$$Z = \frac{R_0\left(R + jX\right)}{R_0 + \left(R + jX\right)} = \frac{R_0 R\left(R + R_0\right) + R_0 X^2}{\left(R + R_0\right)^2 + X^2} + j\frac{X R_0^2}{\left(R + R_0\right)^2 + X^2}$$

インピーダンス角を $\theta$ とおくと，次の関係式がある．

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{X R_0^2}{R_0 R\left(R + R_0\right) + R_0 X^2}$$

ここで，力率が 0.8 であるから，$\cos\theta = 0.8, \sin\theta = 0.6$． これを考慮すると上式は次となる．

$$\frac{X R_0^2}{R_0 R\left(R + R_0\right) + R_0 X^2} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

この式を整理すると

$$4X R_0^2 = 3R_0^2 R + 3R_0\left(R^2 + X^2\right)$$

この式に式(1)を代入すると

$$4X R_0^2 = 3R_0^2 R + 3R_0 R_0^2$$

$$\therefore\ \ X = \frac{3}{4}\left(R + R_0\right) \tag{2}$$

式(1)の両辺を 2 乗した式と式(2)から $X$ を消去して，整理すると

$$25R^2 + 18R_0 R - 7R_0^2 = 0$$

この式を解くと

$$R = \frac{7}{25}R_0\ [\Omega]$$ （正の値を採用）

この値を式(2)に代入すると

$$X = \frac{24}{25}R_0\ [\Omega]$$

【6】

負荷のインピーダンスは

$$Z = 10\angle 30^\circ = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 5\sqrt{3} + j5$$

回路全体の合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{Z \times (-jX_C)}{Z + (-jX_C)} \\ &= \frac{5X_C\left(1 - j\sqrt{3}\right)\left[5\sqrt{3} - j(5 - X_C)\right]}{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + (5 - X_C)^2} = \frac{5X_C\left[\sqrt{3}X_C - j(20 - X_C)\right]}{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + (5 - X_C)^2} \end{aligned}$$

このインピーダンス角を $\theta$ とおくと

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(20 - X_C)}{\sqrt{3}X_C}$$

$\cos\theta = 0.8$ より $\sin\theta = 0.6$．これより上式を $X_C$ について解くと

$$X_C \approx 8.7\ [\Omega]$$

を得る．

【7】

抵抗器を流れる電流を $I_R$ とおくと，分流の考え方を適用して

$$I_R = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \times I = \frac{1}{1 + j\omega CR} \times I$$

これより，抵抗器で消費する電力は

$$\begin{aligned} P &= |I_R|^2 R \\ &= \frac{1}{|1 + j\omega CR|^2}|I|^2 R = \frac{|I|^2}{\frac{1}{R} + (\omega C)^2 R} \end{aligned}$$

$|I|$は一定だから，上式の分母を最小にすれば $P$ は最大となる．上式の分母にある二つの項の積は

$$\frac{1}{R} \times (\omega C)^2 R = 一定$$

であるから，相加平均と相乗平均の関係から

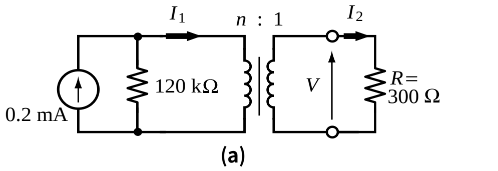
$$\frac{1}{R} = (\omega C)^2 R$$

であるとき，$P$ を示す式の分母は最小，すなわち $P$ は最大となる．すなわち

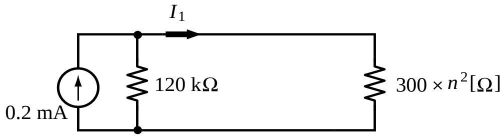
$$R = \frac{1}{\omega C}$$

【8】

問題の回路の等価回路は，右の図(b)となる．図(b)において，電流$I_1$は分流の考え方を適用すると




(a)




(b)

$$I_1=\frac{120\times10^3}{120\times10^3+300n^2}\times0.2\times10^{-3}=\frac{24}{120\times10^3+300n^2}$$

理想変成器であるから

$$I_2=nI_1$$
$$=\frac{24n}{120\times10^3+300n^2}=\frac{24}{\dfrac{120\times10^3}{n}+300n}$$

$V$が最大になるには，$I_2$が最大になればよい．このため，上式の分母の二つの項を見ると

$$\frac{120\times10^3}{n}\times300n=\text{一定}$$

であるから，相加平均と相乗平均の関係を適用すると

$$\frac{120\times10^3}{n}=300n$$

のとき，$I_2$は最大となる．これを解いて

$$n=20$$

このとき

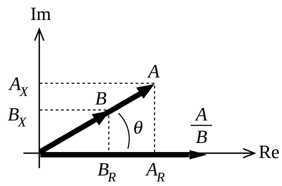
$$I_2=\frac{24\times20}{120\times10^3+120\times10^3}=2\times10^{-3}\ \ \text{A}$$

$$\therefore\ V=I_2R=2\times10^{-3}\times300=0.6\ \ \text{V}$$

【9】

解答を示す前に, 定抵抗回路になる条件について, 本文で触れなかった部分を解説する．

いま，二つの複素ベクトル




(a)

$$\begin{cases}A=A_R+jA_X=|A|\angle\theta_A\\B=B_R+jB_X=|B|\angle\theta_B\end{cases}\qquad(1)$$

があったとき，この除算したベクトル$Z=A/B$について考える．もし，$\theta_A=\theta_B=\theta$ならば，図(a)のように，ベクトル$Z$は実数となり，これは抵抗回路（定抵抗とは限らないことに注意）を意味する．位相差が0であることは，式(1)より，次のようにも表すことができる．

$$\frac{A_R}{B_R}=\frac{A_X}{B_X}\qquad(2)$$

これは，図(a)において，相似な直角三角形の対応する辺の比は等しい，という事実に基づく．

問題の回路図において，いま

$$Z_1=j\omega L+\frac{R/j\omega C}{R+1/j\omega C}\ ,\quad Z_2=\frac{1}{j\omega C}+\frac{j\omega RL}{R+j\omega L}$$

とおくと，回路全体の合成インピーダンスは

$$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{R\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega L}{\left(1-\omega^2LC\right)+j2\omega RC} \qquad (3)$$

上式に式(2)を適用すると

$$\frac{R\left(1-\omega^2LC\right)}{\left(1-\omega^2LC\right)}=\frac{\omega L}{2\omega RC}$$

$$\therefore\ 2R^2=\frac{L}{C} \qquad (4)$$

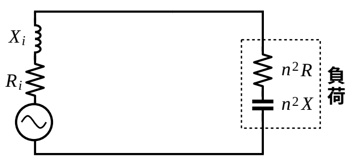
このとき，式(3)の Z は抵抗回路となるが，その大きさが $\omega$ に依存するかどうかを検証する．式(4)を式(3)に代入すると

$$Z=R$$

となる．すなわち，式(4)は定抵抗回路となる条件である．

**【10】**

理想変圧器を考慮した等価回路を右に示す．これより，負荷での消費電力が最大となる条件は




$$\begin{cases} R_i=n^2R \\ X_i=n^2X \end{cases}$$

**【11】**

キャパシタを含む端子 ad 間のインピーダンスは

$$Z_C=200-j400\ [\Omega]$$

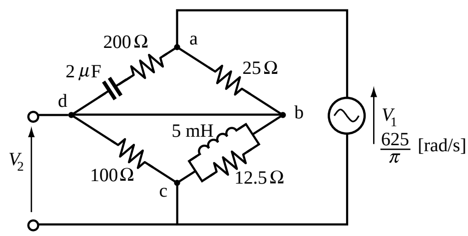
インダクタを含む端子 bc 間のインピーダンスは

$$Z_L=2.5+j5\ [\Omega]$$

ブリッジ回路の平衡条件を確かめると

$$100\times25=2500=Z_C\cdot Z_L$$

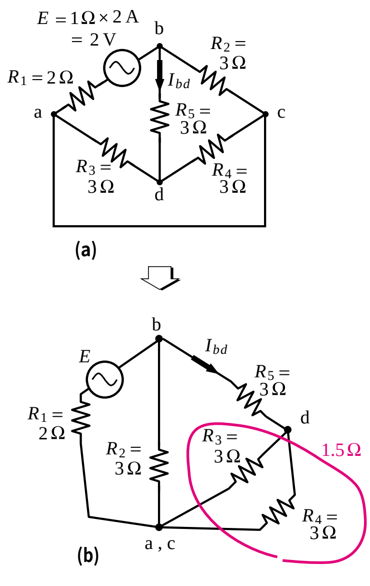
より，ブリッジは平衡している．これより




$$\frac{|V_1|}{|V_2|}=\frac{|100+200-j400|}{100}=|3-j4|=5$$

**【12】**

問題のブリッジ回路において，$R_1=3\Omega$ ならば平衡しているから $I_{bd}=0$．このとき，$R_1$ の抵抗器には2 Aが流れる．次に，$R_1$ が 3Ω から 2Ω に変化したと考え，補償の定理を適用すると右の図(a)の回路を考えればよい．図(a)を見やすいように変形したのが図(b)である．この図において，合成抵抗は

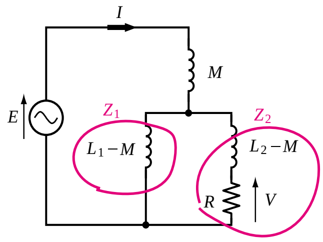



$$R_0=2+\frac{3\times4.5}{3+4.5}=3.8\,\Omega$$

この値と分流の考え方を導入して

$$I_{bd}=\frac{3}{3+4.5}\times\frac{E}{R}=\frac{3}{3+4.5}\times\frac{2}{3.8}\approx0.211\,\Omega$$

【13】




(i) 問題の回路図の等価回路を右図に示す．この図において，回路に流れる電流は

$$I=\frac{E}{j\omega M+\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}}$$

分流の考え方より，抵抗器の両端の電圧は

$$V=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\times I\times R$$
$$=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\times\frac{E}{j\omega M+\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}}\times R=\frac{EZ_1R}{j\omega M(Z_1+Z_2)+Z_1Z_2} \qquad (1)$$

最後の式の分母に注目すると

$$\begin{aligned}j\omega M(Z_1+Z_2)+Z_1Z_2&=j\omega M\{j\omega(L_1-M)+R+j\omega(L_2-M)\}\\&\quad+j\omega(L_1-M)\{R+j\omega(L_2-M)\}\\&=R\{j\omega M+j\omega(L_1-M)\}\\&\quad-\{\omega^2M(L_1+L_2-2M)+\omega^2(L_1-M)(L_2-M)\}\end{aligned}$$

結合係数が 1 であるから $M=\sqrt{L_1L_2}$，これを上式の第 2 項に代入して整理すると，第 2 項 = 0 となる．この結果を，式(1)に代入すると

$$V=\frac{EZ_1R}{R\{j\omega M+j\omega(L_1-M)\}}=\frac{E\times j\omega(L_1-M)}{j\omega L_1}=\frac{E(L_1-M)}{L_1}$$

この結果を見ると，抵抗器の両端の電圧は $R$ に関係しないことがわかる．

(ii) 問題の回路図の電流を用いると，次の連立方程式が成り立つ．

$$\begin{cases}j\omega L_1I_1+j\omega MI_2=E\\ j\omega MI_1+(R+j\omega L_2)I_2=E\end{cases}$$

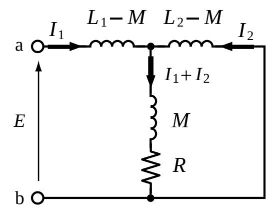
この式を $I_2$ について解き，これに $R$ を乗じると $V$ を得る．すなわち

$$V=I_2R=\frac{j\omega(L_1-M)}{\omega^2(M^2-L_1L_2)+j\omega L_1R}RE$$

ここで $L_1>L_2$ とすると $L_2>M$ であるから，上式の分子は正の虚数となる．このため，分母も正の虚数となればよいから

$$M^2-L_1L_2=0 \qquad \therefore\ M=\sqrt{L_1L_2} \quad (L_2>L_1)$$

【14】




(i) 問題の回路図の等価回路を右図に示す．この回路図より

$$j\omega(L_1-M)I_1+(j\omega M+R)(I_1+I_2)=E \qquad (1)$$

$$j\omega(L_2-M)I_2+(j\omega M+R)(I_1+I_2)=0 \qquad (2)$$

この連立方程式を $I_1$, $I_2$ について解くと

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} (j\omega L_2+R) & -(j\omega M+R) \\ -(j\omega M+R) & (j\omega L_1+R) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta=j\omega R\left[(L_1+L_2)-2M\right]-\omega^2\left(L_1L_2-M^2\right)$$

これより，端子 ab 間のインピーダンス $Z_{ab}$ は

$$Z_{ab}=\frac{E}{I_1}=\frac{\Delta}{j\omega L_2+R}=\frac{j\omega R\left[(L_1+L_2)-2M\right]-\omega^2\left(L_1L_2-M^2\right)}{j\omega L_2+R}$$

(ii) 式(2)を見て，電流 $I=I_1+I_2$ が 0 とすると

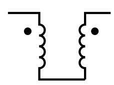
$$j\omega(L_2-M)I_2=0$$

であればよい．これより

$$L_2=M$$

を得る．

変成器の極性について，問題の回路図のように電流 $I_1$, $I_2$ をインダクタに向かう方向にとり，かつ，$M$ の符号を正にとって考えたので，右図の極性である．



(iii) 式(1), (2)を $I_1$, $I_2$ について解き，$I=I_1+I_2$ を求めると

$$\begin{aligned} I&=I_1+I_2 \\ &=\frac{L_2-M}{R(L_1+L_2)-2MR+j\omega\left(L_1L_2-M^2\right)}E \qquad (3) \end{aligned}$$

上式を見て

$$L_1L_2=M^2$$

とおけば，式(3)は

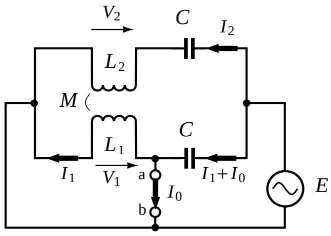
$I$ ＝（実数）× $E$

となり，これは $I$ と $E$ が同相であることを意味する．かつ，$I\neq 0$ となるには

$$L_2>M$$

でなければならない．

**【15】**




右図のような電流分布を考える．これより

$$\begin{cases} V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \end{cases} \qquad (1)$$

次に，右図に示す電圧 $V_1, V_2$ は

$$V_1 = E - \frac{I_1 + I_0}{j\omega C}\ ,\ \ V_2 = E - \frac{I_2}{j\omega C} \qquad (2)$$

ここで，$I_0 = 0$，$V_1 = 0$ として，式(2)を式(1)に代入すると

$$\omega^2 L_1 CE - j\omega M I_2 = 0$$

$$-\omega^2 CME + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right) I_2 = E$$

この両式から $I_2$ を消去すると

$$\left(M + L_1\right) + C\omega^2\left(M^2 - L_1 L_2\right) = 0$$

を得る．これが $I_0 = 0$ となる条件である．これは，$L_1$ の巻線中に $I_1$ を流す起電力が生じているからである．

【16】

　回路全体の合成インピーダンスは

$$Z = r + jx + \frac{jRX}{R + jX}$$

回路に流れる電流は $I = E/Z$，$R$ の抵抗器に流れる電流を $I_R$ とおくと，分流の考え方を適用して

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{jX}{R + jX} \times I \\ &= \frac{(rX + xR + XR) + j(rR - xX)}{(rR - xX)^2 + (rX + xR + XR)^2} XE \end{aligned}$$

抵抗器のみで電力を消費するから

$$\begin{aligned} P &= |I_R|^2 R \\ &= \frac{RX^2E^2}{(rR - xX)^2 + (rX + xR + XR)^2} \\ &= \frac{X^2E^2}{R(r^2 + x^2 + X^2 + 2xX) + \dfrac{(x^2 + r^2)X^2}{R} + 2rX^2} \end{aligned}$$

$R$ のみを変えて $P$ を最大にするには，上式の分母を最小にすればよい．$R$ を含む項に注目して

$$R(r^2 + x^2 + X^2 + 2xX) \times \frac{(x^2 + r^2)X^2}{R} = \text{定数}$$

であるから，相加平均と相乗平均の関係より

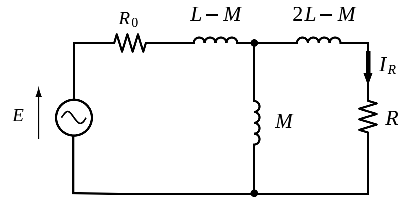
$$R(r^2 + x^2 + X^2 + 2xX) = \frac{(x^2 + r^2)X^2}{R}$$

のとき分母は最小，すなわち $P$ は最大となる．上式を解くと

$$R = X\sqrt{\frac{(x^2 + r^2)}{(r^2 + x^2 + X^2 + 2xX)}}$$

**【17】**

問題の回路図の等価回路を右図に示す．回路全体の合成インピーダンスは




$$Z=R_0+j\omega(L-M)+\frac{j\omega MR-\omega^2M(2L-M)}{R+j2\omega L}$$

$R$ の抵抗器に流れる電流を $I_R$ とおくと

$$I_R=\frac{E}{Z}\frac{j\omega M}{j\omega M+R+j\omega(2L-M)}=\frac{j\omega ME}{\left(RR_0+\omega^2M^2-2\omega^2L^2\right)+j\left(2\omega LR_0+\omega RL\right)}$$

この抵抗器での消費電力を $P$ とおくと

$$\begin{aligned}P&=\left|I_R\right|^2R\\&=\frac{M^2E^2R}{\omega^2\left(2L^2-M^2\right)^2+\dfrac{R^2R_0^2}{\omega^2}+2RR_0\left(M^2-2L^2\right)+\left(2LR_0+LR\right)^2}\end{aligned}$$

消費電力が最大になるには，相加平均と相乗平均の関係より

$$\omega^2\left(2L^2-M^2\right)^2=\frac{R^2R_0^2}{\omega^2}$$

であればよい．ここで，$2L^2-M^2\geq 0$ であるから

$$\omega=\sqrt{\frac{RR_0}{2L^2-M^2}}$$

**【18】**

分圧の考え方から

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}{\dfrac{R_1}{1+j\omega C_1R_1}+\dfrac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}$$

上式を見て

$$C_1R_1=C_2R_2$$

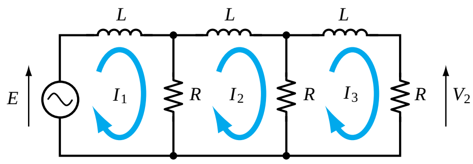
であるならば

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

となり，これは周波数に無関係となる．

**【19】**

右図のように電流分布を考え，これに対して回路方程式を立てると




$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L + R & -R & 0 \\ -R & j\omega L + 2R & -R \\ 0 & -R & j\omega L + 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

(i) これを解いて，式を整理すると

$$\frac{V_2}{E} = \frac{1}{1 - 5\omega^2\left(\frac{L}{R}\right)^2 + \frac{j\omega L}{R}\left\{6 - \omega^2\left(\frac{L}{R}\right)^2\right\}}$$

(ii) (i)の結果で，虚部が 0 となる角周波数は

$$\omega = 0 \quad \text{または} \quad \omega = \frac{\sqrt{6}R}{L}$$

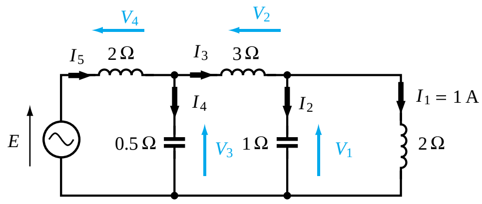
実部が負になるのは後者の場合である．これより

$$f = \frac{\sqrt{6}R}{2\pi L}\,, \quad \frac{V_2}{E} = -\frac{1}{29}$$

**【20】**

右図のように電流と電圧を定め, これらを複素平面上に描くことを考える．初めに，$I_1$ を基準ベクトルにとれば，$V_1$ は $90°$ 進み，その大きさは2 V，というようにベクトルを描いていくと，$E$ は $90°$ 進み，その大きさは 1 V であることがわかる．すなわち

$$E = 1\angle 90° \text{ [V]}$$



# 8章　三相交流回路

**【1】**

図 P1(a)の回路図の場合

$$\text{相電流} = \frac{200}{\sqrt{50^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{29}}$$

$$|I| = \sqrt{3}\times\frac{20}{\sqrt{29}} \approx 6.43 \ \text{A}$$

図 P1(b)の回路図の場合

負荷をＹ型に変換する．対称三相負荷であるから，抵抗，リアクタンスともに1/3倍となる．したがって，

$$|I| = \frac{680}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{15}{3}\right)^2}} = 120 \ \text{A}$$

**【2】**

図 P2(a)の回路に対して

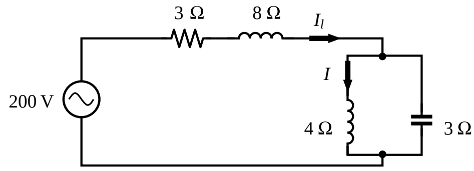
$$I = \frac{100}{6+j8}+\frac{100}{6-j8} = 100\times\frac{12}{6^2+8^2} = 12 \ \text{A}$$

図 P2(b)の回路に対して

Δ型結線のキャパシタをＹ結線に変換すると，そのリアクタンスは3Ωとなり，これと4Ωの誘導性リアクタンスとの合成リアクタンスは，並列であるから

$$\frac{j4\times(-j3)}{j4+(-j3)} = -j12 \ \Omega$$

これより，1相当たり（右図参照）のインピーダンスは




$$3+j(8-12) \ \Omega$$

である．したがって，線電流は

$$I_l = \frac{200}{3-j4} \ [\text{A}]$$

分流の考え方を適用して

$$I = \frac{-j3}{j4-j3}\times I_l = \frac{-600}{3-j4}$$

$$\therefore \ |I| = \frac{600}{\sqrt{3^2+4^2}} = 120 \ \text{A}$$

【3】

1 相分の消費電力と $|I|^2 R$ の考え方から

$$60000\times\frac{1}{3}=10^2\times R \qquad \therefore\ R=200\ \Omega$$

次に，1 相にかかる相電圧 $60000/\sqrt{3}$ V とインピーダンスの関係からリアクタンス $X$ を求める．すなわち

$$\frac{60000}{\sqrt{3}}=10\times\sqrt{R^2+X^2} \quad\rightarrow\quad \frac{600^2}{3}=R^2+X^2$$

$$\therefore\ X=\sqrt{\frac{600^2}{3}-200^2}=\sqrt{80000}\approx 282.8\ \Omega$$

【4】

線電流を求めるため，Δ 結線の抵抗器を Y 結線に変換し，かつ，線間電圧を線電圧に変換して考える．この方針に基づいて，Δ 結線の抵抗器を Y 結線に変換したときの抵抗を $R'$ とおくと

$$R'=\frac{R}{3}=6\ \Omega$$

この抵抗器と 8 Ω のキャパシタの並列回路に $200/\sqrt{3}$ V の相電圧がかかっている 1 相分の回路を考える．抵抗器とキャパシタに流れる電流をそれぞれ $I_R, I_C$ とおくと，線電流の大きさ $|I_l|\left(=|I_a|=|I_b|=|I_c|\right)$ は

$$I_R=\frac{200/\sqrt{3}}{6}\ ,\qquad I_C=\frac{200/\sqrt{3}}{-j8}$$

$$\therefore\ |I_l|=\sqrt{I_R^2+I_C^2}\approx 24.1\ \text{A}$$

$$\cos\theta=\frac{|I_R|}{|I_l|}=0.8$$

【5】

右図を見て，$V_{ab}=200\sqrt{3}\angle 30°$ より

$$I_{ab}=\frac{V_{ab}}{Z}=\frac{200\sqrt{3}\angle 30°}{20\angle 15°}=10\sqrt{3}\angle 15°$$

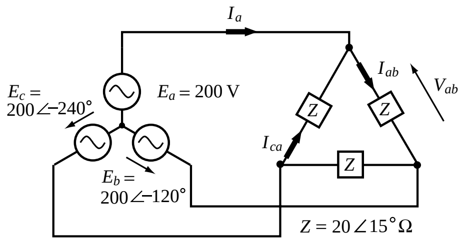
$I_{ca}$ は $I_{ab}$ より 240° 遅れているから

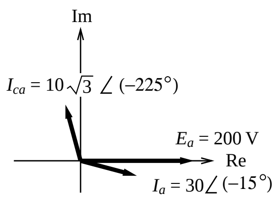
$$I_{ca}=10\sqrt{3}\angle(15°-240°)=10\sqrt{3}\angle(-225°)$$

$I_a$ は $I_{ab}$ の $\sqrt{3}$ 倍，かつ 30° 遅れているから

$$I_a=30\angle(15°-30°)=30\angle(-15°)$$

ベクトル図を右下図に示す．



【6】

$V_{ab}$ を基準ベクトルとするとき，a 相の負荷にかかる電圧 $V_a$ は

$$V_a = \frac{200}{\sqrt{3}}\angle(-30°) \qquad \therefore\ Z = \frac{V_a}{I_a} = \frac{\frac{200}{\sqrt{3}}\angle(-30°)}{20\angle(-30°)} = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle 0$$

よって，力率は 1 である．消費電力は

$$P = \sqrt{3}\times 200\times 20\times 1 = 4000\sqrt{3}\ \ \mathrm{W}$$

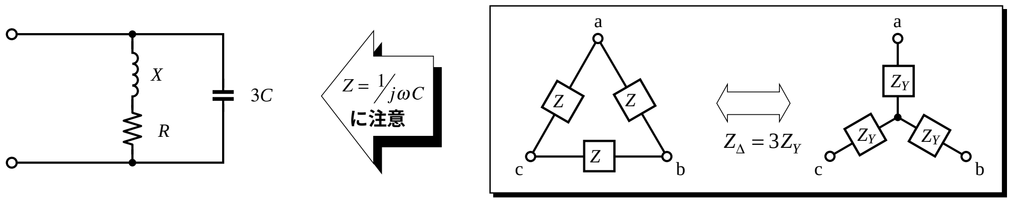
また， 無効率が $\sin\theta = 0$ であるから，無効電力は 0 である．

【7】

(i) 相電圧の大きさは $100/\sqrt{3}$ V であるから

$$|I_l| = \frac{100/\sqrt{3}}{|8+j6|} = \frac{100/\sqrt{3}}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\ \ [\mathrm{A}]$$

(ii) キャパシタは $\Delta$ 結線である．これを $RL$ 負荷の Y 結線に変換すると，1 相当たりのキャパシタンスは $3C$ となる（下図参照）．




上図に示す回路は 1 相分を表し，このアドミタンスは

$$Y = \frac{1}{R+jX} + j\omega(3C) = \frac{R-jX}{R^2+X^2} + j\omega(3C) \qquad (1)$$

$\mathrm{Im}[Y]=0$ とおくと力率は 100% になるから

$$\frac{-X}{R^2+X^2} + \omega(3C) = 0 \qquad \therefore\ (3C) = \frac{X}{\omega\left(R^2+X^2\right)} = \frac{6}{500\left(8^2+6^2\right)} = \frac{3}{25000} \approx 120\,\mu\mathrm{F}$$

したがって

$$C = \frac{120\,\mu\mathrm{F}}{3} = 40\,\mu\mathrm{F}$$

(iii) 力率が 100% のときのアドミタンスの大きさは式(1)より

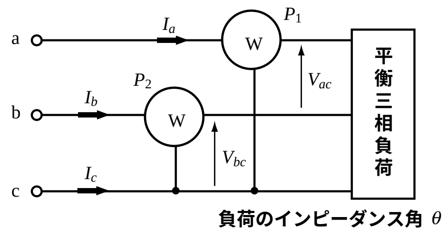
$$|Y| = \frac{R}{R^2+X^2} = \frac{8}{100}$$

これより

$$|I_l| = |Y||V_p| = \frac{8}{100}\times\frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\ \ \mathrm{A}$$

$$P = \sqrt{3}\times 100\times\frac{8}{\sqrt{3}}\times 1 = 800\ \mathrm{W}$$

**【8】**




右図を考えて，2 個の電力計の指示をそれぞれ $P_1, P_2$ とすると

$$P_1 = |V_{ac}||I_a|\cos\phi_1 = |V_{ac}||I_a|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P_2 = |V_{bc}||I_b|\cos\phi_2 = |V_{bc}||I_b|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

題意により，線間電圧と線電流の大きさは等しく，かつ $P_1 = 2P_2$ とすれば

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\theta\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\theta\frac{1}{2} = 2\left(\cos\theta\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

これより $\theta = \pi/6$，よって負荷の力率は約 0.866 である．

**【9】**

力率 $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ であるから $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$．有効電力，無効電力，皮相電力をそれぞれ $P, Q, S$ とおくと

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

また，線電流の大きさを $|I_l|$ とおくと

$$S = \sqrt{3} \times \text{（線間電圧の大きさ）} \times |I_l|$$

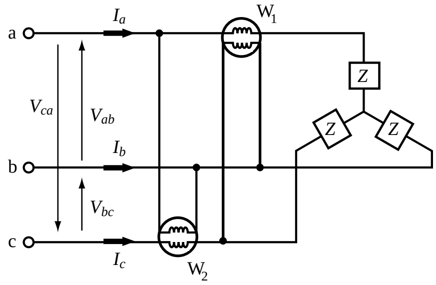
であるから，上の 2 式より

$$\sqrt{3} \times 6 \times |I_l| = \sqrt{(1700 \times \cos\theta + 1200)^2 + (1700 \times \sin\theta)^2} \approx 2686.1\ \ \mathrm{kV \cdot A}$$

$$\therefore\ |I_l| = \frac{2686.1}{\sqrt{3} \times 6} \approx 258.5\ \ \mathrm{A}$$

**【10】**

負荷のインピーダンス角を$\theta$，相電圧を$V_a$，$V_b$，$V_c$とおけば，各量のベクトル図は右下図に示すとおりである．




電力計$W_1$の指示値が$P_1$であり直接の測定量は$V_{cb}(=-V_{bc})$と$I_a$，電力計$W_2$の指示値が$P_2$であり直接の測定量は$V_{ab}$と$I_c$であるから，これらの位相差に留意する．線間電圧の大きさを$|V_l|$，線電流の大きさを$|I_l|$とおくと

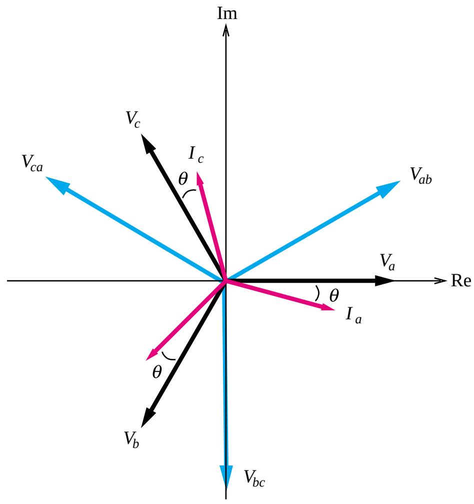
$$P_1=|V_l||I_l|\cos(90°+\theta)=-|V_l||I_l|\sin\theta \quad [\mathrm{W}]$$

$$P_2=|V_l||I_l|\cos(90°-\theta)=|V_l||I_l|\sin\theta \quad [\mathrm{W}]$$

電力計$W_1$の指示値は負であるから，この符号を反転させて指示値を読むこととして，次の値

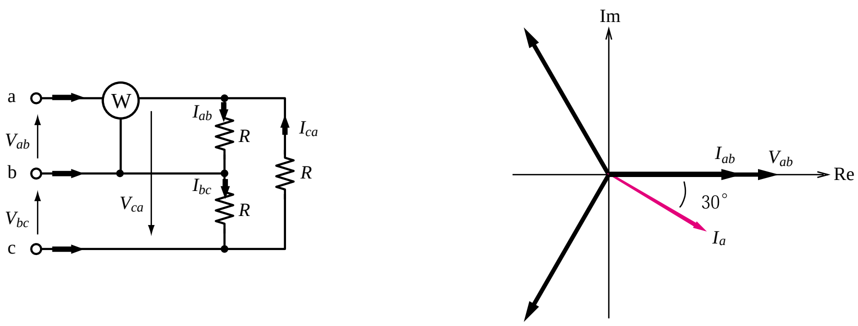
$$P=P_2-P_1=2|V_l||I_l|\sin\theta$$

を計算する．これを$\sqrt{3}/2$倍すれば，三相の無効電力を表す．




**【11】**

下図(a)のように，電流と電圧を定め，これに対応するベクトルを図(b)に示す．




(a) (b)

負荷は抵抗器であるから$V_{ab}$と$I_{ab}$は同相，すなわち，力率は1である．線間電圧の大きさを$|V_l|$，線電流の大きさを$|I_l|$とおくと，負荷での全消費電力は

$$P=\sqrt{3}|V_l||I_l|$$

一方，電力計には$V_{ab}$と$I_a$が計測されており，この位相差は30°であるから，電力計の指示値は

$$P'=|V_l||I_l|\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}|V_l||I_l|$$

したがって，指示値を2倍すれば全消費電力となる．

【12】

Y 結線に変換した後のインピーダンスをそれぞれ $Z_a$，$Z_b$，$Z_c$ とおいて

$$Z_a = \frac{Z_{ca}Z_{ab}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = \frac{(3+j4)(2+j8)}{10+j20} = 0.76+j1.68\ [\Omega]$$

$$Z_b = \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = \frac{(2+j8)(5+j8)}{10+j20} = 1.16+j3.28\ [\Omega]$$

$$Z_c = \frac{Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} = \frac{(3+j4)(2+j8)}{10+j20} = 1.42+j1.56\ [\Omega]$$

【13】

線間電圧 $E_{ab}$ を基準ベクトルとして考えると，相電圧は次となる．

$$V_a = \frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-30°)\ ,\ V_b = \frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-150°)\ ,\ V_c = \frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-270°)$$

これより

$$I_a = \frac{V_a}{Z_a} = \frac{\frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-30°)}{10+j2} \approx 4.68-j4.11\ [\mathrm{A}]$$

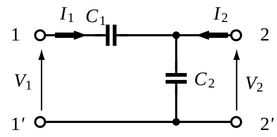
$$I_b = \frac{V_b}{Z_b} = \frac{\frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-120°)}{5+j6} \approx -7.63+j2.81\ [\mathrm{A}]$$

$$I_c = \frac{V_c}{Z_c} = \frac{\frac{110}{\sqrt{3}}\angle(-270°)}{3+j2} \approx 9.77+j14.7\ [\mathrm{A}]$$

# 9章　二端子対回路

**【1】**

図 P1(a)に対して，右図のように電流，電圧を定めて考える．図より




$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = j\omega C_1$$

次に，$V_1 = 0$（$1-1'$間を短絡）にすると，$C_1$の両端に$V_2$がかかる．$1 \to 1'$の方向に流れる電流を$I_1'$（$=-I_1$）とおくと

$$I_1' = j\omega C_1 V_2$$
$$\therefore\ \frac{I_1'}{V_2} = j\omega C_1$$

よって

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_1=0} = \left.\frac{-I_1'}{V_1}\right|_{V_1=0} = -j\omega C_1$$
$$Y_{21} = Y_{12} = -j\omega C_1$$

また，$1-1'$間が短絡のとき，$2-2'$間のアドミタンスは$j\omega(C_1+C_2)$となるから

$$I_2 = j\omega(C_1+C_2)V_2$$

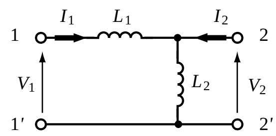
よって

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = j\omega(C_1+C_2)$$

次に，

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Y}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} j\omega C_1 & -j\omega C_1 \\ -j\omega C_1 & j\omega(C_1+C_2) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_1+C_2}{j\omega C_1 C_2} & \dfrac{1}{j\omega C_2} \\ \dfrac{1}{j\omega C_2} & \dfrac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix}$$

図 P1(b)の回路に対して，電圧，電流を右図のように定める．初めに$Z$行列を求め，次に$Y$行列を求める．この手順を上と同様に行うと




$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} j\omega(L_1+L_2) & j\omega L_2 \\ j\omega L_2 & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega L_1} & -\dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -\dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{L_1+L_2}{j\omega L_1 L_2} \end{bmatrix}$$

**【2】**

(a) $\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{j\omega CR} & \dfrac{1}{j\omega C} \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1-\omega^2 LC & j\omega\left(2L-\omega^2 L^2 C\right) \\ j\omega C & 1-\omega^2 LC \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1-\omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C\left(2-\omega^2 LC\right) & 1-\omega^2 LC \end{bmatrix}$

(d) (a)の $F$ 行列同士の乗算から得られる．すなわち

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{j\omega CR} & \dfrac{1}{j\omega C} \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\dfrac{1}{j\omega CR} & \dfrac{1}{j\omega C} \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{1}{j\omega CR}\right)^2+\dfrac{1}{j\omega CR} & \dfrac{1}{j\omega C}\left(2+\dfrac{1}{j\omega CR}\right) \\ \dfrac{1}{R}\left(2+\dfrac{1}{j\omega CR}\right) & 1+\dfrac{1}{j\omega CR} \end{bmatrix}$$

**【3】**

図 P3(a)の回路の場合

$$Z'_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{1}{j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L+{}^{1}\!/\!_{j\omega C}}}=\frac{1-\omega^2 CL}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)}$$

$$Z'_{21}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{\dfrac{{}^{1}\!/\!_{j\omega C}}{{}^{1}\!/\!_{j\omega C}+j\omega L+{}^{1}\!/\!_{j\omega C}}\times\dfrac{1}{j\omega C}I_1}{I_1}=\frac{1}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)}$$

$$Z'_{12}=Z'_{21}$$

また, 回路が対称のとき, $Z'_{11}=Z'_{22}$ となることが知られている．

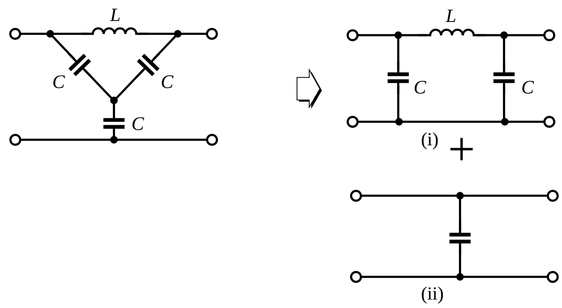



図 P3(b)の回路は，右図に示す(i)と(ii)の回路の直列接続とみなせる．図(i)は先に考えた図 P3(a)の回路と同じである．図(ii)の $Z$ 行列を求めると

$$Z''_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{1}{j\omega C}\qquad Z''_{12}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}=\frac{1}{j\omega C}=Z''_{21}$$

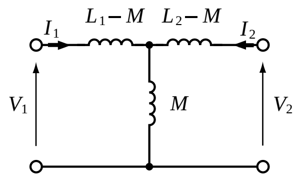
回路は対称であるから，$Z''_{11}=Z''_{22}$．

以上より，直列接続の $Z$ 行列は

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3-2\omega^2 CL}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)} & \dfrac{3-\omega^2 CL}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)} \\ \dfrac{3-\omega^2 CL}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)} & \dfrac{3-2\omega^2 CL}{j\omega C\left(2-\omega^2 CL\right)} \end{bmatrix}$$

**【4】**

問題の等価回路を右図に示す．これより

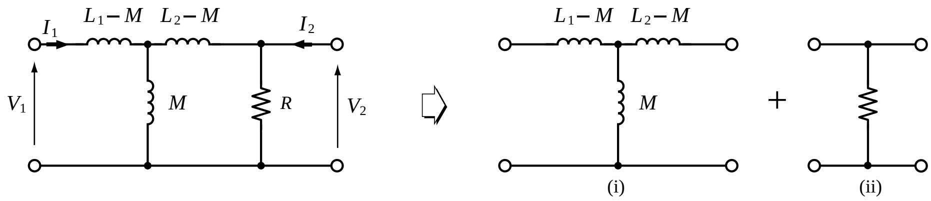



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & j\omega(L_1-M) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{j\omega M} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & j\omega(L_2-M) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & j\omega\left\{\dfrac{L_1}{M}(L_2-M)+(L_1-M)\right\} \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

**【5】**

問題の回路図は，下図のように分解できる．




図(i)は問 4 と同じである．図(ii)の $F$ 行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

である．これより，求める $F$ 行列は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M} & j\omega\left\{\dfrac{L_1}{M}(L_2-M)+(L_1-M)\right\} \\ \dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{L_1}{M}+j\omega\dfrac{1}{R}\left\{\dfrac{L_1}{M}(L_2-M)+(L_1-M)\right\} & j\omega\left\{\dfrac{L_1}{M}(L_2-M)+(L_1-M)\right\} \\ \dfrac{L_2}{MR}+\dfrac{1}{j\omega M} & \dfrac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

【6】

回路網の入出力関係は

$$\begin{bmatrix} E_1 - I_1 Z_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 - I_2 Z_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

これを $I_1, I_2$ について解くと

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} D - CZ_2 & AZ_2 - B \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 - AE_2 \\ -CE_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = Z_1 \left( D - CZ_2 \right) + \left( B - AZ_2 \right)$$

よって

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( CZ_2 - D \right) E_1 + \left\{ A \left( D - CZ_2 \right) - C \left( AZ_2 - B \right) \right\} E_2 \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \left[ E_1 - \left( A + CZ_1 \right) E_2 \right]$$

# 10 章　非正弦波交流

**【1】**

ひずみ率は

$$\frac{\sqrt{\left(30/\sqrt{2}\right)^2+\left(20/\sqrt{2}\right)^2}}{100/\sqrt{2}}\approx 0.361$$

**【2】**

直流分電流

$$i_0=\frac{5}{10}=0.5\ \ \mathrm{A}$$

基本波電流

$$i_1=\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{10^2+5^2}}\sin(\omega t-\theta_1)\approx 8.94\sqrt{2}\sin(\omega t-\theta_1)$$

第 3 調波電流

$$i_3=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{10^2+(3\times 5)^2}}\sin\left(3\omega t+\frac{\pi}{6}-\theta_2\right)\approx 0.555\sqrt{2}\sin\left(3\omega t+\frac{\pi}{6}-\theta_2\right)$$

電流の実効値

$$|I|=\sqrt{0.5^2+8.94^2+0.555^2}\approx 8.95\ \ \mathrm{A}$$

電力

$$P=\left(0.5^2+8.94^2+0.555^2\right)\times 10\approx 805\ \ \mathrm{W}$$

別解として，

$$\begin{aligned}P&=|V_0||I_0|+|V_1||I_1|\cos\theta_1+|V_3||I_3|\cos\theta_3\\&=5\times 0.5+100\times 8.94\times\frac{10}{\sqrt{10^2+5^2}}+10\times 0.555\times\frac{10}{\sqrt{10^2+15^2}}\approx 805\ \ \mathrm{W}\end{aligned}$$

**【3】**

第 7 調波に対しては，$2\pi fL=X_L$ は 7 倍になるが，$1/2\pi fC=X_C$ は 1/7 倍になる．

$$\therefore\ \ 7X_L-\frac{1}{7}X_C>0\quad\therefore\ \ 49X_L-X_C>0$$

$$\therefore\ \ X_L>\frac{X_C}{49}\approx 0.0205X_C$$

よって，2.05 % 以上が条件である．

**【4】**

　回路に流れる電流を $i$ として

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \tag{1}$$

上式を解くと

$$i=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{2}$$

$t=\tau(=L/R)$ のときの抵抗器の両端の電圧 $V_R$ は

$$\begin{aligned} V_R &= R\times i \\ &= R\times\frac{V}{R}\times\left(1-e^{-\frac{R}{L}\times\frac{L}{R}}\right) \\ &= V\times\left(1-e^{-1}\right)\approx 6.32\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

$t\to\infty$ とすると

$$i=\frac{V}{R}=I$$

定常値の 0.9 倍（ $0.9I$ ）になるまでの時間 $t$ は

$$0.9I=I\left(1-e^{-\frac{10}{50}t}\right)$$

これより，次を満足すればよいことがわかる．

$$e^{-\frac{10}{50}t}=0.1$$

両辺の対数をとると

$$\log_e\left(e^{-\frac{10}{50}t}\right)=\log_e 0.1$$

$$\therefore\ -0.2t\approx -2.3$$

よって，$t=11.5\ \mathrm{s}$ を得る．

【5】

　$v_i$ と $v_o$ の波形を次に示す．