

——【はじめに】—— このような人に本書をお勧めします！

まずは、「微積を使った物理」に興味のある受験生のみなさん。これから物理の受験勉強を始めるのなら、志望大学合格のために、是非とも微積を武器にしてください。本書は「物理に微積を持ち込むのはハードルが高い」という通念を覆すために書かれた参考書です。「なぜ物理に微積が必要なのか」という部分の解説から出発し、最終的に「実は物理は微積を使ったほうが簡単だ」という結論を示す内容となっています。力学と電磁気学に関して、受験生が大学合格のために必要な知識を効率的に得られるよう工夫に工夫を重ねました。

とにかくすらすら読める本にすることを意識したので、読書をする感覚で読んでください。本書を読めばあなたの憧れている「微積を使った物理」が、手に取るように理解できるはずです。

次に、予備校で「微積を使った物理」を教わっている受験生のみなさん。予備校には、微積を駆使して物理の本質を教えてくれる素晴らしい先生方がたくさんいらっしゃいます。山本義隆先生（駿台予備学校）や苑田尚之先生（河合塾、東進ハイスクール、城南予備校）など有名ですね。私はこのような信頼できる先生方の授業を受けることを受験生に推奨していますが、一方で、これらの授業が本質を突いているがゆえに、一部の受験生に大変な努力を要求してしまっていることも事実です。しかし、物理に微積を持ち込もうとしたあなたの判断は正しいので、絶対に諦めて欲しくはありません。本書には、これらの授業に付いていくのに苦労している受験生、または挫折してしまった受験生の、「そこが知りたかった」が網羅されています。

解説の仕方は違えど、本質を突いた先生の授業内容はみな同じです（物理の本質はこの世にひとつしかないからです）。本書はその本質を、極限まで効率的に、極限まで噛み砕いて解説したものです。もしあなたがこれらの先生の授業を受けているならば、本書の内容は確実にその授業とリンクしているはずです。

最後に、「微積を使った物理」を知らずに合格した大学生のみなさん。うすうす気付いているとは思いますが、微積を使った物理を知らずに大学に入ってしまった場合、試験前に確実に苦労を強いられます。試験前日に徹夜するくら

いなら、早めに始めましょう。本書の内容はすべて、大学で学ぶ物理にそのまま適用できます。そして大学特有の堅苦しい教科書よりも、ずっと読みやすくわかりやすいはずです。本書は受験生に対して授業を行う感じで書いているので、「受験においては」「高校では」などという言葉がよく出てきますが、居心地が悪いと感じないでください。むしろ「受験生でも読む本なんだから自分も理解できないとやばいぞ」と思いながら読んでもらいたいのです。

受験生とは違い精神的、時間的な余裕がある分、存分に楽しみながら読んでください。

本書では、物理の本質を扱います。「物理に微積を用いる」というと「裏ワザ」のように聞こえるかもしれませんが、本来は、微積があってこそその物理なのです。中途半端な「ゆとり」主義が、微積を物理から排除し、受験生に、「物理は公式を覚えるだけのつまらない教科」という印象を植え付けてしまいました。しかも、数学のほうでは真顔で微積を教えているにもかかわらず、です。本書では、それを元に戻し、物理の本来あるべき姿を学んでいただくだけです。したがって、「裏ワザ」というよりは、むしろ「表ワザ」なのです。

そして本書は、この「表ワザ」を効率的に学んでいただくのに最も適した「日本語ベース」の参考書です。全20章を一気に読み切ってください。授業を受けている感覚で読めるため、それほど時間はかからないはずです。問題演習が途中に何問か入っていますが、面倒くさければ自分で解こうとせずにいきなり解説を読み始めてもらって構いません。細かい部分の復習も後回しで結構です。とにかく、最後まで読み切ることです。そうすれば、あなたの世界観が変わるはずなので、まずはそれを味わっていただきたいのです。

以上、すべての物理に関わる学生が、幸せな勉強生活を送れますように。

—— 【もくじ】 ——

01	物理に微積を持ち込む3つの理由 1 「モチベーションが上がる」とは？ 「物理の本質が見える」とは？ 「頭の良さの絶対値が上がる」とは？
02	アマチュアとプロフェッショナル 8 プロフェッショナルの余裕 これがプロフェッショナルの答案！ 真の「わかりやすい」参考書とは？
03	微分と物理の切っても切れない関係 23 変位を時間で微分したものは？ 解答用紙をすっきりさせる記号
04	積分で物理の美しさを覗いてみる 28 インテグラルと dx で「挟む」？ どっちが本当の「ゆとり」か？
05	微積の基本テクニックを使いこなす 37 合成関数は「中身を隠して」微分せよ！ 積分は常に「初期値」を考慮せよ！
	問題演習1 43
06	「運動方程式しかない」という話 51 運動方程式は心を無にして書くべし 「運動方程式ラビット」鮮烈デビュー！
07	間違える訳がない「力の書き方」 59 なぜ一番上の物体を考慮しないのか？ 物体の分け方はソルバーの自由である

08	個性を發揮できる「座標のとり方」.....	65
	解答用紙に自分の個性を表現せよ！ 本質を知れば慣性力は付けざるを得ない	
09	物理の世界観を変える「束縛条件」.....	73
	抗力の束縛条件と抗力にまつわる話 張力の束縛条件と張力にまつわる話	
	問題演習2	95
10	運動方程式の変形をマスターする	100
	力積&運動量は「時間」で積分！ 仕事&エネルギーは「変位」で積分！	
	問題演習3	118
11	微積の持つ本当の意味を理解する	124
	なぜ微分は肩の数を前に出すのか？ なぜ微分の反対が積分なのか？	
12	力学で得た知識の集大成「単振動」.....	133
	何をもって単振動と言えるのか？ エネルギー保存と座標のからくり	
13	他分野と違うようで同じ「円運動」.....	146
	円運動の運動方程式は今までと違う？ 遠心力もエネルギーも今までと同じ	
	問題演習4	157
14	力学を卒業するために必要な常識	164
	モーメントは他とは一線を描いている プロフェッショナルとしての心構え	

	問題演習5	178
15	流れで理解する「電場」と「電位」..... 電場は「電場」以外の何者でもない 電位は「単位電荷の位置エネルギー」	187
	問題演習6	202
16	理解すれば馴染める「コンデンサ」..... 電気容量は定数を置き直しただけ 電磁気学でもやはり基本は運動方程式	208
17	やることはいつでも同じ「回路」..... そもそも「電流」と「抵抗」の定義は？ 回路で考えるべきことはいつでも3つ！	215
	問題演習7	228
18	左手は封印して右ねじを回す「磁場」..... 試験中は左手は封印してください！ 正直ちょっと面倒くさい(?)公式	233
19	微積の理解がモノを言う「電磁誘導」..... 仕組みともうひとつのアプローチ コイルの起電力は左辺に書け！	246
	問題演習8	254
20	微積で最後の感動を味わう「交流」..... なぜ位相が $\pi/2$ ずれるのか？ RLCは最後の難関にして最後の感動	259
	問題演習9	270

01

物理に微積を持ち込む3つの理由

この本のテーマはずばり、物理に微積（微分と積分）を持ち込むことにより、公式を覚えて当てはめるだけの高校物理の考えから脱却しようというものです。微積を物理に持ち込むと言うと、受験生は思わず身構えてしまうかもしれませんが、本書で用いる微積はすべて高校の範囲で習うものなので、数学が人並み（受験生なら誰でも知っている公式を覚えているレベル）に理解できていれば全く難しくありません。

高校の物理に微積を持ち込む理由は3つあります。

- ・物理に対するモチベーションが上がる。
- ・物理の本質が見え、物理の点数が上がる。
- ・頭の良さの絶対値が上がり、数学の点数が上がる。

以下、それぞれの理由について、詳しく説明していきます。

「モチベーションが上がる」とは？

第一に挙げたモチベーションですが、これは受験勉強において最も大切なことでしょう。私は高校生の頃、公式を当てはめることが美德と言わんばかりの物理に幻滅し、文系への転向さえも真剣に考えていました。そうなるともう物理を勉強する気になれないし、葛藤の挙げ句やっとの思いで教科書を開いたとしても、気が乗っていないため公式もろくに頭に入ってきません。好きだった英語は伸びていく一方で、物理は放置プレイでした。

私に限った話ではありません。私はこれまでに何人かの受験生を指導してきましたが、彼らを見ていてもモチベーションの大切さを感じずにはられません。短時間にスパッと集中して勉強できる受験生はやはり学力が伸びるし、周

りから見ていても勉強している姿がかっこよく、そういう受験生は運も寄せ付けるように感じます。

反対にただただ勉強している受験生は、勉強している内容がストレートに頭に入ってきません。邪念や負のオーラが混じって、ノイズ入りのイメージとなり脳内に記憶されてしまいます。周りから見ていても負のオーラに溢れていて、何か「人生で損をしている人」という印象です。この効率の悪さでは、集中している受験生と同じ量の知識やテクニックを吸収するのに、何倍もの時間を要してしまうでしょう。最も大切なことは、心底楽しみながら勉強することです。

物理に微積を持ち込むと、まず受験勉強が楽しくなり、この問題を解決することができます。楽し過ぎるのです。「受験科目として反則だろ」と思うほど楽しいのです。

微積を用いた解法は、これまで別々のものとして教えられてきた物事をすべて一本に繋げます。私はこの微積を用いる方法に出会ってからこの方法を開拓していく過程で、今まで別々であると思っていた物同士の繋がりが見えることにひどく感銘を受け、あれほど嫌いだっただ物理が大好きになりました。それどころかこの物理という一介の受験科目は受験が終わってからも趣味のひとつとして付き合いしていく対象にまで成り上がり、私はといえばこのように本まで出させてもらうことになりました。

元々は別々の物として認識しているものが一本に繋がる感動は、筆舌に尽くし難いものがあります。人間が本能的に芸能ニュースが好きなのと同じです。「あの俳優とあのモデルが結婚」と聞いて「まじで？」と思うのは、元々それぞれを知っている状態があり、それらが繋がったからでしょう。

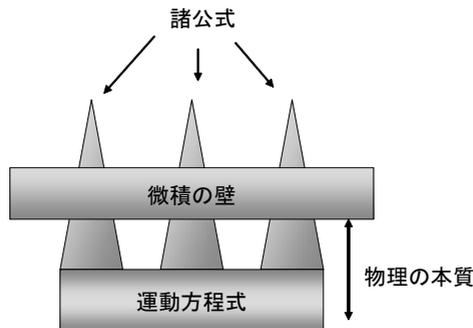
そういう意味で、私は現時点で物理に嫌気が差している人にこそ本書を読んでもらいたいと思っています。なぜならそういった人の中には、「公式はすべて別々のもの」という認識が既に確立しているからです。あらかじめ公式群に馴染みが深ければ、それらが繋がったときに得られる感動は、物理を最初からこの方法で学習する人の2倍や3倍になるはずで、「あの俳優とあのモデルが結婚」は「あの俳優と一般女性が結婚」の2倍や3倍の衝撃があるでしょう。

したがって、既に公式をたくさん丸暗記してしまった人は、この本を読んで得られる感動が人よりも大きくなることを喜んでください。今まで公式を暗記してきた時間が無駄だったわけでは決してありません。モチベーションこそ、受験における最大の武器です。2倍や3倍の感動が得られれば、勉強の効率が2倍や3倍に上がるはずですよ。

「物理の本質が見える」とは？

さて、第二に挙げた物理の本質とは、上で述べたように高校では別々に教わる物が一本に繋がるということを表しているのですが、具体的に言えば、例えば「力学における公式は運動方程式を変形したものばかりだ」ということです。言い換えれば、ほぼすべての問題は最初に運動方程式を立てて、後はそれを問題に沿って変形すれば解けるということです。

次の図を見てください。



高校で習う物理の諸公式、つまり、つり合いの式や自由落下および放物運動の変位、速度、加速度の式、さらにエネルギーと仕事の関係や運動量と力積の関係などは、すべて氷山の一角のようなものです。互いに何の関係もない別々の公式のように教えられるますが、実は水面下では運動方程式という名の一本の

式で繋がっているのです。繋がっているというか、これらはすべて運動方程式から派生しているのです。

微積を用いることにより、その水面下の本質を見ることができます。本質を見ることができれば、常にその本質を意識しながら問題を解くことができます。

本質を知らない人は、与えられた問題に対して、どの氷山の一角を攻めるか（どの公式を使うか）を考えることから始めなければなりません。物理の問題を解いている最中に鉛筆（というかシャーペン）が止まってしまう人は、見た目もどれも似ていて使いどころがおぼろげなこの公式群に圧倒されてしまっているのです。既に公式を一通り暗記した方なら経験があるはずです。

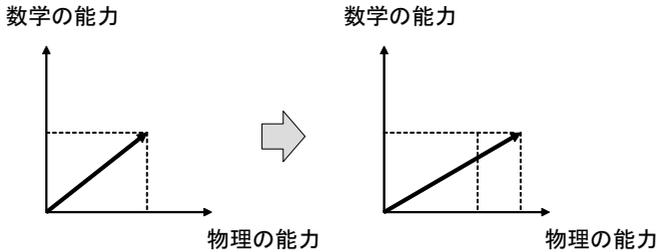
一方、微積という武器で微積の壁を突破し、物理の本質に到達できる人は、すべての問題に対して水面下の運動方程式から攻めていくことができます。これができるとどのような問題に対しても、どの氷山を攻めるか迷う必要がありません。迷わず土台となる部分（運動方程式）を攻めれば、すべての氷山が崩れ落ちていくわけですから。

言い換えれば、どのような問題に対しても、やることが決まっているのです。やることが決まっているからシャーペンが止まることはありませんし、解答までの道筋があらかじめ見えているので確実に解答にたどり着くことができます。

氷山に例えて物理のイメージを話しましたが、これは「なんかうまいこと言ってやろう」と思って強引にこじつけたわけでは決してありません。微積を使わない物理の苦しさや微積を使う物理の楽しさの両方を知っている人に言わせれば、高校物理とはまさにこのようなイメージなのです。微積を食わず嫌いでいる人にわかってもらうために、このような例え話をしているのです。

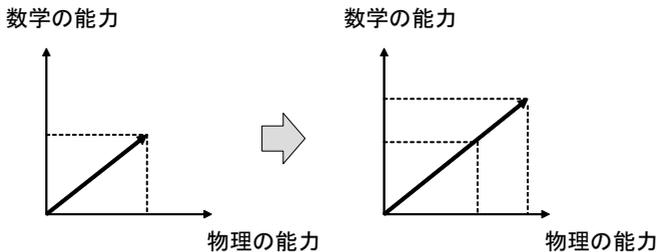
「頭の良さの絶対値が上がる」とは？

次に第三に挙げた頭の良さの絶対値ですが、こちらも図を使ってイメージを説明します。問題を解く能力をベクトルを用いて表すと、公式を覚えるだけの勉強法の場合、次の図のように能力が上がります。



ベクトルの物理方向の成分のみが伸びる感じですね。実際、物理の勉強中に、他の教科の能力もアップしていると思う人はいないはず。物理の勉強をしている人は、もちろん物理の能力が上がることを期待しているわけで、普通は数学の能力もアップすることなど期待しないでしょう。

しかし、微積を用いて物理の学習を行った場合、能力の上がり方は次の図のようになります。



今度は物理と数学の合成ベクトルがそのまま伸びています。ベクトルの方向は維持したままでベクトルの長さを長くすることで、物理の能力と共に、数学の能力も上がるのです。これを私は、「頭の良さの絶対値が上がる」と呼んでいます（実際は先ほどの図でもベクトルは長くなっていましたが、響きが好きでこの言葉を使っているだけなのでそこに厳密性は求めないでください）。

実は微分も積分も、数学の教科書で習うだけでは完全に理解できていない人

がほとんどです。みなさんも思い当たる節がありませんか。自分は数学が得意なほうだけれど、微積の分野だけ何かしっくり来ていない。他の分野はすべて自分で完璧に説明できるけど、微積だけあいまいな部分が残っている。

「いや、自分は別に微積の分野にも違和感を持っていない」と言う人もいるでしょう。実はそういった人のほうが危険で、そのような人の中には自分が微積を理解していないことにさえ気付いていない人がいます。完全に理解しているつもりでも、「じゃあなぜこうなるのか」と厳密な証明を求められると証明できない。

いずれにせよ、微積という分野はその性質上、数学の教科書だけで完全に理解することが非常に難しくなっているのです。そこを補完するために、物理で微積を用いることが絶対的に必要なのです。

したがって、最初に「物理に微積を持ち込む」と聞いて、「自分は数学の教科書の微積だけでいっぱいだから、物理に持ち込むなんて無理」と思った人は、本末転倒なわけです。物理に微積を持ち込まないから、数学の微積がいっぱいいっぱいなのです。つまり、数学の微積がいっぱいいっぱいの人ほど物理を通じて微積を学ぶ必要性があり、それにより数学のいっぱい感じが解消することを、私は「頭の良さの絶対値が上がる」と呼んでいるのです。

一方、この地球上で人間として生活を営んでいく上で、うまく、スマートに生きていける人のことを、通常みなさんは「頭が良い」と呼ぶはずですが、少し前に「地頭力」という言葉が流行りましたが、それと同じようなものです。

実は、微積で物理を解くときの能力の上がり方を「頭の良さの絶対値が上がる」と表現したのは、そういう理由もあるのです。どのような問題に対しても柔軟に対応できる力、具体的に力の名前を挙げるとすれば発想力や論理的思考力が、飛躍的に上昇するのです。先に述べたように、これは当然数学の能力にも関わってきますし、ひいては国語や英語の能力にも関わってくると私は本気で思っています。私は高校時代、国語や英語が得意なほうでしたが、これは物理の問題を微積を用いて解くことで培われた論理的思考力によるところが大きいと感じています。

というのは、どの教科においても、暗記に頼らざるを得ない部分には必ず限界が訪れるからです。英語なら単語やイディオムは暗記するしかないのですが、十分に時間のある受験生の場合、覚えるべきものは全部覚えたという境地に達した瞬間、成績は頭打ちになってしまいます。そうなると頼りになるのは頭の良さの絶対値しかなく、各受験生は「頻出単語は全部覚えた」という平等な土台の上で、頭の良さの絶対値を武器に闘っていかなければなりません。

そしてこの頭の良さの絶対値こそが、現代の社会で求められているものでしょう。暗記力が幅を利かせる学歴ではなく、頭の良さの絶対値が評価される時代です。みなさんは人生規模のロングタームで、この頭の良さの絶対値を上げる必要があります。これには暗記力とは異なり限界がないので、常にこれを上げることを意識しながら勉強することができれば、学力の上昇はとどまる所を知らず、成績は青天井になるはずですよ。

以上の理由から、物理に微積を持ち込んだほうが得をするのです。絶対に、持ち込むべきです。もう、一生のお願いです。持ち込んでください。

02

アマチュアとプロフェッショナル

受験生のみなさんは、一種の仕事人です。解答者、英語で言うとソルバーです。目の前に次々に出される問題に対する自分なりの答えを、筆記用具と自分の頭脳、センスを用いて一枚の紙の上に表現する。ある種の芸術家と言っても良いでしょう。芸術家と言うとかっこよく聞こえますが、この章では、実はこのソルバーという名の芸術家はアマチュアとプロフェッショナルに分けることができ、かっこいいのはプロフェッショナルだけだ、という話をします。

みなさんもご存知の通り、大抵の受験生は、公式を丸暗記するだけで数学的な底流の存在を知らないまま勉強を続けています。私も最初はそうでした。この状態は、高校物理の「アマチュア」のソルバーであると言えます。一方、運動方程式がすべてを支配しているという一種の悟りのようなものを会得した人々は、高校物理の「プロフェッショナル」のソルバーであると言えます。

例えば、「エネルギーとは何ですか」と聞かれたら、あなたは何と答えますか。「運動エネルギーは $1/2 \cdot mv^2$ で、重力の位置エネルギーは mgh で、ばねの位置エネルギーは $1/2 \cdot kx^2$ で…」と、説明を始めるでしょうか。

では、「じゃあなぜ重力の位置エネルギーには $1/2$ が付かないのですか」と聞かれたらどうしますか。さらに、「なぜ仕事はエネルギーに変わるのですか」、「運動量と力積についてはどうですか」と追討ちをかけられたら、もう手も足も出ないでしょう。

しかしながら、これらのことはあなた自身が、物理を学ぶ過程で幾度となく疑問に思ってきたことなのではないでしょうか。にもかかわらず、未だに何となくの理解で「エネルギー」という得体の知れないものを、惰性に任せて使い続けているのではないですか。

これが、私がアマチュアをアマチュアと呼ぶ所以です。自分がいつも頼りにし

ている公式に、本当はどのような意味が潜んでいるのかわからない。つまり、ブラックボックスに依存しているのです。これは恐ろしいことではありませんか。

先生に「この公式を覚えなさいよ」と言われたからとりあえず覚えて、その公式の真の姿を知らずに使い続ける。シェフに「この伊勢エビおいしいでしょ」と言われて出されたものを喜んで食べている人が、実はザリガニを食べているようなものです。

まあ味が同じなら別に良いのですが、実は先ほどの「エネルギーとは何ですか」、「なぜ重力の位置エネルギーには $1/2$ が付かないのですか」、「なぜ仕事はエネルギーに変わりますか」、「運動量と力積についてはどうですか」というアマチュアが困ってしまう質問群を、プロフェッショナルは次の一言で片付けてしまいます。

「運動方程式を x で定積分したとき、左辺をエネルギーと呼んで、右辺を仕事と呼んでいるだけです。ちなみに、 t で定積分したときは、左辺を運動量と呼んで、右辺を力積と呼んでいます」

びっくりした人が多いと思いますが、この言葉の学問的な意味は後でじっくり解説するとして、私がここで言いたいのは、プロフェッショナルはすべての事実に対して理由付けができるため、高校物理の問題を高所から見下ろすことができる、ということです。そのため、受験生でありながら高校物理のプロフェッショナルであることは、入試において最大のアドバンテージになるのです。

プロフェッショナルの「余裕」

プロフェッショナルは、すべての問題を上から見下ろすことができます。常に任務の完遂を保證できるほどの気持ちの余裕を持って作業を行うことができます。

プロフェッショナルは、問題を見た瞬間に手が動き出します。自分の解法に信念を持っているため、自分がすべきことがわかっているのです。

そしてプロフェッショナルは、美しい解答用紙を作り出すことができます。誘

導尋問などなくとも、すべてを論理的に組み立てることができます。

高校物理のプロフェッショナルソルバーとなった人は、どれほど奇をてらった問題に遭遇しても、顔色ひとつ変えずに問題に取り掛かることができます。物理という学問を本質的に理解した上で為すべきことを為すだけなので、自然と手が動き出すのです。このことに関しては、プロフェッショナルソルバーは他の受験生（アマチュアソルバー）と比較して優位に立っていると自負して差し支えありませんし、むしろその高揚感を武器にして闘ってほしいのです。

試験当日はやはりナーバスになると思いますが、それは他の受験生も同様ならば相対的にプロフェッショナルソルバーが有利です。なぜなら、自分はこの教科を本質的に理解し、高所から見下ろす形で問題を解いてきたという自信があるからです。公式を覚えただけの受験生が知らない部分を自分は知っている。しかも自分は公式を覚えるだけの方法も知っている上で知っている。

何かを知っている人は、それを知る前に知らないという状態も経験しているわけですから、知らないという状態と知っているという状態の両方を知っています。例えばビールや焼酎のようなお酒は初めて飲んだ瞬間から好きになる人は稀で、大概の人は何度も飲んで強くなっていくうちに好きになるものですが、そうやって焼酎が好きになった人は「焼酎って臭いから無理」と言っている人に対して「わかってないな」と言えます。自分も嫌いだった状態を経験した上で好きになったからです。

高校生にお酒の話をしてイメージしにくいと言うのなら、小中学生の頃を思い出してください。誰でも最初は勉強が好きではなかったはずですが。私も小中学生の頃は勉強が大嫌いでした。しかし嫌々ながらも勉強を続けて少しでも勉強に楽しさを見出したのなら、最初から勉強を投げ出してその楽しさを知らずに頭ごなしに勉強を否定している小中学生に、「わかってないな」と言えるはずですが。

あなたがまだ物理の本質を知らないアマチュアソルバーであるならば、それは「アマチュアソルバー」であると同時に「ショウチュウガクセー」です。「焼酎が臭せえー」と言うお酒のアマチュア、または「小中学生」です。

一方のプロフェッショナルソルバーは、二重の意味で、アマチュアソルバーの上に立っていると言えます。ひとつは「本質を知っている」という意味で、もうひとつは「本質を知っていることを知っている」という意味です。ソクラテスの「無知の知」という言葉がありますが、今は「知の知」の話です。ここから生まれる気持ちの余裕は、尋常ではありません。例えるなら、右利きなのに左手で問題を解けるぐらいの余裕です。試験当日に受験会場で、この気持ちの余裕を持っているだけでどれだけ有利なポジションに立てることでしょう。

表面的には暗記科目にさえ見える高校物理に対して、公式を覚えて当てはめて解くだけのルーティンワークに甘んじている受験生がいます。そしてその一方で、微積を駆使して幸せな受験勉強生活を謳歌している受験生もいるのです。前者がストレスを溜めながら伸びあぐねている間に、後者は物理の楽しさを知ることモチベーションを上げ、本質的な理解を糧に効率的に勉強をしています。しかも数学的な能力をすべて高めながら、頭の良さの絶対値を上昇させています。前者に対して「わかってないなー」と言いたくもなるでしょう。

まずはこの現状を知ることです。あなたが「微積は難しい」という先入観を持っているのなら、あなたは二重の意味で重要なことを知らないのです。知っている人の立場から言わせれば、この方法は全く難しくないし、というかむしろ簡単だし、何よりも楽しいので、絶対にマスターしたほうが良いのです。

本当に難しくないので。このことを大学教授や予備校の先生が言っても、「それはあんたが頭いいからでしょ」と言われかねません。だからこそ大学生である私が筆を取った（というかパソコンを開いた）のです。私が言います。難しくありません。本当です。何年か前まで受験生であった私が言うのだから本当です。私は受験生のときから微積の恩恵を受けてきました。当時の私がこの方法を修得してから、どれだけ得をして、どれだけ受験に役立てることができたかということを、わかってください。

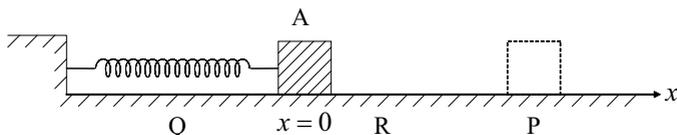
これがプロフェッショナルの答案！

概念的な説明ばかりをしていても実感が湧かないと思うので、早速、一般的な解き方とプロフェッショナルの解き方の比較をしてみたいと思います。ここでは解答の詳細な部分まで理解できなくても全く問題ありません。まだ何も教えていないのですから。詳しい解説はこの本を通じてじっくりと行うので、ここでは「おいおい、なんかすげーぞ」という程度で構いません。漠然と「すげー」と思っていただければ大丈夫です。

【問題（北海道大）】

次の文章を読み、空欄に適切な数式を入れよ。

図に示すように、水平な床面上に質量 m [kg] の物体 A を置き、つるまきばねを取り付ける。ばねが床面と水平になるように、ばねの他端を壁に固定する。物体 A は図の x 軸上を運動し、その位置を座標 x [m] で表す。ばねが自然長のとき物体 A の位置を原点 $x = 0$ にとり、ばね定数を k [N/m] とする。物体 A と床面との間の動摩擦係数を μ とする。ただし、重力加速度の大きさは g [m/s²] とし、ばねの質量は無視できるものとする。



物体 A を点 P ($x = 5l$) まで引っ張り、時刻 $t = 0$ で静かに手を放した。このとき、物体 A は x 軸の負の向きに動き始め、点 Q ($x = -3l$) で運動の向きを反転し、再び x 軸の正の向きに運動した。その後、物体 A は時刻 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ [s] で点 R ($x = l$) に停止した。なお、以下の問いでは l を用いて答えてもよい。

(1) 物体 A が P から Q まで移動するとき、ばねにたくわえられた位置エネルギー（弾性エネルギー）の変化は (ア) [J] と表される。また、この間に動摩擦力がした仕事は (イ) [J] である。両者の仕事は相等しいので、動摩擦係数 μ は (ウ) と求められる。

(2) 時刻 $t = 0$ で手を離れた物体 A はしだいに速さを増し、最大の速さになったのち、徐々に減速して点 Q で 0 となった。この間、物体 A が受ける力は右向きを正として (エ) [N] と表される。したがって、物体 A の運動は $x =$ (オ) [m] を中心とする単振動の動きに等しいことがわかる。よって、この中心で物体 A の速さは最大となり、その値は (カ) [m/s] となる。また、物体 A が点 Q で反転する時刻は (キ) [s] である。

(3) 次に物体 A が Q から R まで移動するとき、物体 A に作用する力は右向きを正として (ク) [N] と表され、この区間の振動の中心は $x =$ (ケ) [m] である。

< 一般的な解答用紙 >

(1) ばねの位置エネルギーは、

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{1}{2}k(-3l)^2 - \frac{1}{2}k(5l)^2 \\ &= -8kl^2\end{aligned}$$

より、(ア) $-8kl^2$ である。動摩擦力は μN で、鉛直方向のつり合いは $N = mg$ なので、動摩擦力がした仕事は、

$$\begin{aligned}W &= \mu mg \cdot (-8l) \\ &= -8\mu mgl\end{aligned}$$

より、(イ) $-8\mu mgl$ である。これらが等しいので、

$$-8kl^2 = -8\mu mgl$$

を解いて、(ウ) $\mu = kl/mg$ となる。

(2) P から Q までは摩擦力が右向きに働くので、求める力は μ を代入し、

$$\begin{aligned}F &= -kx + \mu mg \\ &= -kx + \frac{kl}{mg} \cdot mg \\ &= -k(x - l)\end{aligned}$$

より、(エ) $-k(x - l)$ である。振動の中心は $F = 0$ となる x なので、(オ) $x = l$

である。また、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(5l - l)^2$$

を解いて、(カ) $v_{\max} = 4l\sqrt{k/m}$ である。ばねの単振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ なので、反転する時刻は (キ) $2/T = \pi\sqrt{m/k}$ である。

(3) Q から R までは摩擦力が左向きに働くので、

$$\begin{aligned} F &= -kx - \mu mg \\ &= -kx - \frac{kl}{mg} \cdot mg \\ &= -k(x+l) \end{aligned}$$

より、(ク) $-k(x+l)$ である。振動中心は $F = 0$ となる x なので、(ケ) $x = -l$ である。

< プロフェッショナルの解答用紙 >

(1) x 方向の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx + \mu N \quad (x > 0) \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = -kx - \mu N \quad (x < 0) \quad (2)$$

で、 y 方向（鉛直方向、上向きを正）の運動方程式は束縛条件 $\ddot{y} = 0$ を用いて、

$$0 = N - mg \quad (3)$$

である。P から Q までは式 (1) を用いる。Q のときの時刻を $t = t_0$ とすると、

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^{t_0} &= [\mu Nx]_0^{t_0} \\ -8kl^2 &= -8\mu mgl \end{aligned}$$

となり、位置エネルギーの変化は左辺なので、(ア) $-8kl^2$ である。動摩擦力がした仕事は右辺なので、(イ) $-8\mu mgl$ である。 μ はこれを解いて、(ウ) kl/mg である。

(2) 式 (1) の右辺に μ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} -kx + \mu N &= -kx + \frac{kl}{mg} \cdot mg \\ &= -k(x - l) \end{aligned}$$

より力は (エ) $-k(x-l)$ である。これより、

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x-l)$$

となり、これは、(オ) $x=l$ を振動中心とする、角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ の単振動である。さらに、

$$\frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}k(x-l)^2 = C$$

なので、

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(5l-l)^2$$

を解いて、(カ) $v_{\max} = 4l\sqrt{k/m}$ である。またこの単振動の周期は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

なので、(キ) $2/T = \pi\sqrt{m/k}$ である。

(3) Q から R までは式 (2) を用いる。式 (2) の右辺より、

$$\begin{aligned} -kx - \mu N &= -kx - \frac{kl}{mg} \cdot mg \\ &= -k(x+l) \end{aligned}$$

なので、力は (ク) $-k(x+l)$ である。これより、

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x+l)$$

で、これは (ケ) $x = -l$ を振動中心とする単振動である。

いかがでしょうか。解答用紙に書いた文字の数はプロフェッショナルのほうが多いので、一見「余計に面倒くさそうだな」と思われる方もいるかもしれませんが。しかし、たとえ文字数が多くても、問題を解くために要した時間は確実にプロフェッショナルのほうが短いはずです。

理由はひとつ。やることが決まっているからです。最初に問題を読み終えたらすぐに手が動き出し、解答をすべて書き終えるまでその手が止まることはほとんどありません。単位などの確認をしている間に小休止がある程度です。

考えてみてください。例えば(1)では仕事とエネルギーの関係を求めています。一般的な解答では、公式を書いている間に「摩擦力があっても普通のエネルギーの形で大丈夫か」「仕事にマイナスを付ける必要はあるか」「仕事はどのエネルギーに変わるか」など、思案が絶えません。解答用紙は公式を書くだけなのですっきりして見えますが、それを書く過程が非常に不安定なのです。このような簡単な問題なら何とか誤魔化せても、もっと難しい問題になると確実に混乱してしまうでしょう。エネルギーを求めている間に、あなたのエネルギーが消費されてしまいます。

いいですか。「公式をそのまま書く」ということは、解答用紙をすっきりさせることができる代わりに、その公式と他の問題との関連が全く見えなくなるため、それだけ間違えるリスクを上げてしまうということです。次の問題に移行するたびに関連性が見えない公式を書かなければならず、公式を書くたびに「注意しなければならないこと(マイナスを付けるか否か、など)」を検討しなければならない。その「注意しなければならないこと」はいくつもあり(しかも全部でいくつあるかは謎で)、それらをすべて間違えずにクリアしなければならない。「注意しなければならないこと」をすべて思い付けずにマイナスを付け忘れてしまうなど、日常茶飯事でしょう。不安定極まりありません。解答用紙がすっきりしていることは、実は喜ばしいことではないのです。「間違えないこと」のほうがよっぽど重要だからです。

プロフェッショナルの解答は、運動方程式を立てるところから始まり、やることはいつも同じ。しかもその中で、座標のとり方も計算の方法も自由自在。こ

の本の中で私は「問題を見下ろすことができる」という言葉をたくさん使いますが、こういうことです。数式を思いのままに操ることができる。先の展開が見える。余裕を持って解くことができる。それは100点満点のテストを解きながら、「本当は120点取れる実力があるけど、テストは100点しか取れないから100点で我慢するか」と思ってしまうほどの余裕です。

そもそも、プロフェッショナルの解答用紙は、(まだ数式の詳しいことは理解できなくても)見た感じの印象として、かっこいいと感じませんか。「物理をすべて理解している」感が、行間からひしひしと伝わって来ませんか。

真の「わかりやすい」参考書とは？

次章からいよいよ本格的な話が始まります。この本を最後まで読めば、上のような解答が書けるようになります。高校物理のプロフェッショナルになれるのです。

私自身が受験生の頃の気持ちを思い出し、当時の自分が苦労した部分に特に力を入れて文章を書きました。そして、受験生のやる気を殺ぐような無駄をすべて排除し、取っ付きやすくわかりやすい文章にすることにこだわりました。一言一句、一式一変数に壮大な意味を込めています。

先ほど「知っている人は知らない状態を経験した上で知っているから『わかってないな』と言える」という話をしましたが、私自信も「知らない」という状態を経験しており、最初はもちろん「物理に微積を持ち込むのは難しそう」と思っていました。本書は、そんな「わかってない」当時の自分に向けて説明するつもりで書いた本です。

他の参考書に比べ、数式を少なく、日本語の文章を多くしました。図を多く用いたのは、みなさんに新しい概念のイメージをしてもらうためです。最初に直観的なイメージができれば、初めての概念も学びやすくなります。しかし、いつまでもイメージだけではいけません。それではアマチュアと何も変わりません。イメージだけで誤魔化しているのがアマチュア、理解を本質的に行っているのがプロフェッショナルです。日本語の文章を読んで、本質的な理解を享受

してください。

もう一度言います。イメージは直観的に、理解は本質的に、行ってください。お願いします。

もうひとつ。本書では、数式や図に目印となる番号を付していません。したがって、他の参考書においては例えば「この t を式 (1) に代入すると」と書かれるであろう部分が「この t を先ほどの x 方向の運動方程式に代入すると」などと書かれています。

これには意図があります。従来の参考書のように「式 (1) に代入すると」と言われると、読者の作業は前ページに戻って式 (1) の中に t があることを確かめるのみにとどまってしまうがちです。その式 (1) がどういう式であったかという背景を確かめることなく、機械的に代入して「確かにそうだ」と納得したつもりになってしまいます。これでは、次に「自力でやってみろ」と言われたときに手が出ないという状況に陥ってしまいます。

頭で理解しただけでは足りないのです。それを自分で使うことができ、できればそれを人に教えることができ、初めて真の意味で理解できたと言えるのです。あえて「この t を先ほどの x 方向の運動方程式に代入すると」と言うことにより、読者はその式を探しながら、その式が運動方程式であったことを確認しなければなりません。これにより、自分が今何をしているのか、という流れがより掴みやすくなるのです。数式に番号が付してあると、「私が言っているのはこの式ですよ」ということを明確に、一意に示すことができちゃう分、読者に流れを掴む作業を怠らせてしまうのです。

このような確固たる信念に基づいて、数式に番号を付すことをやめました。したがって、数式に番号がないことに関して「わかりにくい」と言わないでください。あなたのために、あえてわかりにくくしているのです。というか、それは「わかりにくい」ではありません。「面倒くさい」だけです。何事も、面倒くさい訓練を経ることなしに上達できないのは普遍の原理です。というか、ひとたび微積を用いた解法をマスターしてしまえば、最終的にはかなり楽をできるのですから、長い目で見ればそのほうが「面倒くさくない」のですが。

さらに言わせてもらえば、逆に聞かせてもらいますが、数式に番号が付してあれば、それは「わかりやすい」のですか。違います。「わかった気になりやすい」のです。わかっていないのにわかった気になるのが一番怖い。その人は自分がわかっていないことさえわかっていないのですから。先ほどの「知っていることを知っている」の、まさに対極を行くこととなります。

そのような「わかった気になりやすい」参考書を書くのは簡単です。何事も、伝統的で、慣習に迎合した書き方をすれば良いだけです。私は俗受けを狙わない、本質を突いた、ケレン味のない参考書を書きたいのです。そのためにすべてを疑いました。図や式の書き方から日本語の使い方に至るまで、ありとあらゆる要素をもう一度見つめ直し、理に合っている部分は維持し、形式的になっていると判断した部分は改善しました。

各章の最後にまとめのコーナーのようなものがないのも、そのうちのひとつです。私は読者のみなさんに、すべてを「一連の流れ」の中で理解していただきたいのです。いただきたいというか、いただかないと話にならないのです。まとめの部分だけを後で見直す、というような復習方法は全く意味がありません。ある部分を忘れたら、その前後も（というかその章を全部）読んで、一連の流れのまま頭に叩き込んでもらいたいのです。

この参考書は、本質的で効率的な理解のために隅々まで計算し尽くされた、読者のみなさんが絶対的な信頼を置くに相応しい、そんな本を目指して書いたものです。時間を掛けても構いません。1 ページに 20 分ずつ掛かっても良いのです。その代わり、私が一言一句、一式一変数に込めた思いをすべて拾い尽くしてください。いいですか。それでは、始めましょう。

03

微分と物理の切っても切れない関係

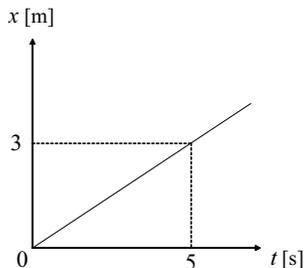
プロフェッショナルソルバーは公式の代わりに微積を武器に闘っていくのですから、まず微積に対する理解を完全なものにしなければなりません。しかし受験生にとっては、微積というものは敷居が高いというイメージが先行してしまいがちです。そこで、まずそのイメージを払拭してもらうことから始めなければなりません。

しかしここで微積の解説にあまりにも時間を掛けると、「いつになったら物理が始まるんだよ」という話になってしまいます。そうやって受験生のやる気を殺してしまうのが、世の参考書の常です。

したがって、ここでは必要最小限の、本当に必要最小限の知識のみを確認します。物理に入る前に絶対知っておかなければならないことのみを確認です。そして、微積に関する深い部分は、物理と並行して学んでいただきます。

—————変位を時間で微分したものは？

ではまず、微分とは何かを考えていきます。微分とは、傾きを求めるもの、という認識の人が多いと思います。基本的に、それでオッケーです。次のグラフを見てください。横軸は時刻（時間）、縦軸は変位を表しています。



5秒間に3メートル進んでいますね。この物体の速度が秒速3/5メートルであるということは、誰でもわかるはずです。

そしてこの3/5という数字が、このグラフの傾きになっているということも大丈夫ですね。このグラフを関数で表すと、

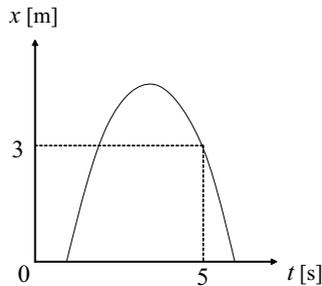
$$x = \frac{3}{5}t$$

となるので、これを t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5}$$

となり、微分したものが傾きを表していることがわかります。このように、変位を時間で微分すると、速度になります。

では次のように、速度が時々刻々と変化する場合はどうでしょう。



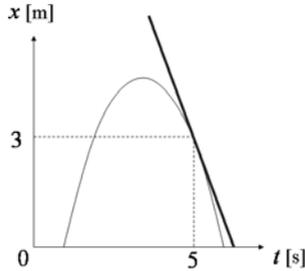
この変位のグラフは $x = -t^2 + 6t - 4$ という関数で表されているとします。

これを微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = -2t + 6$$

となり、今回は微分した式の中に t が残ってしまいました。当然です。今回は速度は時々刻々と変化するので、時刻 t の影響を受けるに決まっています。

ここで、例えば $t = 5$ のときの傾き（すなわち速度）を求めたければ、 $-2t + 6$ に $t = 5$ を代入して、 -4 が得られますね。次の図の直線の傾きが、 -4 ということです。



妥当ですね。速度が負になっているので、減速中です。

単位時間の変位の変化量を速度と呼ぶのに対して、単位時間の速度の変化量を加速度と呼びます。したがって、加速度は速度を時間で微分したものとなり、上の例では

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2$$

が加速度となります。この例では加速度は時間によらず、一定なのです。

変位を時間で微分すると速度になることと、速度を時間で微分すると加速度

になること。この2つのことを常に意識できるようになってください。

————— 解答用紙をすっきりさせる記号

さてここで、ひとつ便利な記号を覚えてもらいたいのです。先ほど変位を「時間」で微分して、速度を出しましたね。あるいは速度を「時間」で微分して、加速度を出しましたね。

物理においては、微分や積分は時間で行うことがほとんどです。その度ごとに

$$\frac{dx}{dt} = -2t + 6$$

などと書いては面倒でしょう。何が面倒かと言われれば、左辺が面倒でしょう。画数が多い。

そこで、次のような便利な記号を紹介します。

$$\dot{x} = -2t + 6$$

この x の上に付けた点は「ドット」と呼ばれ、「時間」で微分したことを表す記号です。「時間」で微分したのならば、いつでもこの「ドット」を付けてください。 \dot{x} は「エックスドット」と呼びます。

同様に時間で2回微分した場合は、

$$\ddot{x} = -2$$

のように書いてください。読み方は、「エックスツードット」です。

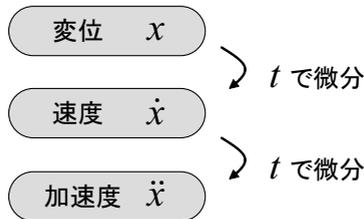
これらの記号は高校で習わないため、「この記号を答案用紙に書いてもいいのですか」という質問が非常によくありますが、書いてもらって全く問題ありま

せん。事も無げに書いてください。

これらはれっきとした物理、数学の記号で、むしろ出題者のほうが使いたくてうずうずしているぐらいです。高校ではこの記号は教えないという決まりがあるため、問題文の中では使えない、というだけです。なので、解答者である学生は自由に使って良いのです。

正しいことであれば、たとえ高校で習っていないことでも解答用紙にどんどん書いて構いません。私も高校時代から使っていましたし、実際に高校や予備校でこの記号を教える先生もたくさんいるようです。安心して使ってください。

まとめます。変位を x とすると、速度は変位を時間で微分したもの、すなわち \dot{x} になります。そして加速度は速度を時間で微分したもの、つまり変位を時間で2回微分したもの、 \ddot{x} です。



微分に関しては、今のところはとりあえずこの確認のみでとどめ、先に進みましょう。まだ本質的な解説はしていませんが、この段階で解説を根本から悠長にやり過ぎて受験生のやる気を殺ぐ参考書にはしたくないというのが、私の思いです。

それよりも全体を一度撫でることのほうが大事です。いち早く物理の素晴らしさを垣間見て、いち早くモチベーションを上げましょう。

04

積分で物理の美しさを覗いてみる

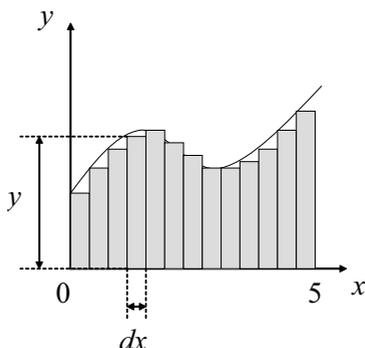
どんどん進みます。次は積分です。微分は「傾きを求めるもの」という認識でオッケーと言いました。それと同様に、積分は「面積を求めるもの」という認識の人が多くかと思えます。

しかし積分に関しては、その認識でオッケーとは言いません。積分は、なぜ面積が求められるかということまで詳しく考える必要があります。なぜならば、この理論は他の重要な考え方に結びついていくからです。

高校物理において微分を使うシチュエーションでは、先ほどのように時間で微分することがほとんどです。しかし積分に関しては、時として時間以外にも様々なもので積分する必要が生じます。積分という便利な道具を、自分の思うがままに扱えるようにならなければいけないのです。

————— インテグラルと dx で「挟む」？

よく次のような図を用いて解説されますね。



この図において、 y は x の値によって変化します。そして色の付いた部分は、 x 方向に、 dx という幅に細かく区切られています。

まずひとつ注意することとして、当たり前な人には当たり前過ぎることかもしれないですが、 dx は、 d と x に分かれているわけではありません。 dx でひとつの定数です。「ものすごく微小な大きさ」を表す定数です。 π が約 3.1415 を表すというのと同じ感じで、 dx は約 0.0001 を表すというイメージを持ってください（イメージですよ。実際はもっともっと微小な数です）。

ここで腑に落ちない人は、「2文字でひとつの定数を表すなんてあり得るのか」という疑問が湧いている人です。私も最初はそこに納得がいかなかったのを覚えていますが。そして「あり得る」と答えと、「じゃあ d という変数と x という変数が別個にあったとして、その掛け算の dx を表したい場合、ひとつの変数を表す dx と紛らわしくなるじゃないか」という疑問に変わります。ひねくれ者というよりは、すべてが秩序だっていなければ気が済まない人、つまり理系としての資質がある人ほど、こういうことを考えてしまうのだと思います。

しかし、そこは勘弁してください。例えば日本人が「動いた」という文字を見て、「重」「力」に分かれていると思って「じゅうりょくいた」と読みますか。日本語に精通している日本人は、手書きの「重」と「力」の間のスペースの大きさが微妙だったとしても、後ろに「いた」という送り仮名があるのを見て、「動いた」であると判断できるはずですよ。

これと同じです。数学や物理に精通している理系の人間は、 d と x の間のスペースの大きさが微妙でも（というかスペースの大きさは関係ありませんが）、 dx がインテグラル \int の右にあるのを見て、 dx はひとつの変数であると判断できるのです。

理解できますよね。「理解できますよね」と言うより、「許せますよね」と言ったほうが相應しいのかもしれない。許せますよね。

これが許せない A 型タイプの人（私もそうですが）、解答用紙の細部に拘泥して試験時間を浪費してしまう嫌いがあります。しかし受験というのはあなたが思っているほど厳格さを要求されるものではない、ということをは是非ひと

つ覚えておいてください。要は、採点者が理解できれば良いのです。私もそのことに気づき始めたときはショックでした。その妙なこだわりのせいでどれだけ損をしたことか、計り知れません。

さて、では先に進めます。ご存知の通り、 $x = 0$ から $x = 5$ までのグラフと x 軸の間の部分の面積は、

$$\int_0^5 y dx$$

と表されますね。この式の意味を詳しく見ていきます。

今から説明することの結論を最初に言うておきます。インテグラル \int とシグマ \sum は本質的に同じです。インテグラルもシグマも上下に小さく数字を付けるでしょう。これらは同じような扱い方をしてください。

なぜこのようなことをあえて言うのかというと、残念なことに上の式を「 \int と dx で y を挟む」と解釈してしまう人が実に多いからです。もしこれがシグマならば、そのような解釈はしないはずです。例えば

$$\sum_{x=0}^5 ax$$

と書いたら、「 \sum と x で a を挟む」などと解釈する人がいますか。絶対にいいはず。普通は「 \sum の右側に ax がある」と解釈するでしょう。「挟む」などという概念自体が頭になかったはず。

それなのに、インテグラルになると、「 \int と dx で y を挟む」という解釈をする。しかもそういう人に限って、インテグラルとシグマは本質的には同じ記号だと説明すると、「いや、別々の記号でしょう」と口まで挟んでくる。まったく、挟むのは y だけにしてください。いいですか、本質的に同じなのです。

シグマは「 \sum の右側に書いたものをどんどん足していく」と捕らえるでしょう。ならばインテグラルも「 \int の右側に書いたものをどんどん足していく」と捕らえてください。

つまり、

$$\int_0^5 y dx$$

は、「 $y dx$ をどんどん足していく」なのです。そしてこの $y dx$ とは何かというと、長方形ひとつひとつの面積でしょう。小さい長方形の面積を足していった結果が全体の面積になるという考え方自体は知っているはずですが。ならば「 \int と dx で y を挟む」という考え方はやめてください。

もっと言えば、ひとつひとつの長方形の面積は $y dx$ と書いても dxy と書いても同じでしょう。したがって、実は次のように書いても何も問題ないことになります。

$$\int_0^5 dxy$$

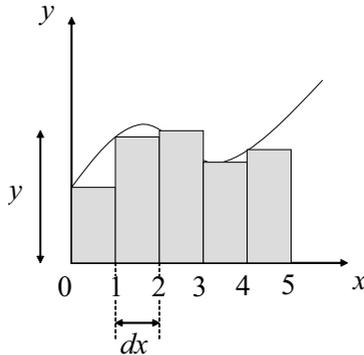
こう書くと、「挟む」という考え方をしている人は、脳内の理論が崩壊してしまいますね。全然挟めていない。はみ出している。しかし、この書き方は、「あり得る」のです（この書き方は説明のために示しただけで、普通は dx を後に書くのが慣習になっているので、わざわざこう書くのは避けてくださいね）。

インテグラルはシグマと同じです。インテグラルの右に書いたものを足し合わせる。それだけのことです。決して dx とコンピを組んでいるわけではありません。インテグラルはソロです。

では「本質的に」同じであると言ったシグマとインテグラルは、実際には何が違うのかということ、シグマは x が 0、1、2、3...と整数の値をとりながら増え

ていくのに対し、インテグラルは x が 0、0.0001、0.0002、0.0003...のように考え得る限り最小の刻みで増えていくというところです。

次の図のように、 dx を無駄に大きくとってみましょう。



本当は dx は、この世では考えられないほど小さいものを表すので、このように肉眼で確認できるほど大きな値を dx と置くのはいけません、ここでは説明のためです。この面積は、まさに次のように表すことができるでしょう。

$$\sum_{x=0}^4 y dx$$

dx と x は別物ですよ。 dx は一定値（この場合、 $dx = 1$ ）です。0、1、2...と増えていくのは x で、これを代入するのは y の中です。 y は x の関数（例えば $y = x^2 + 5x + 1$ など）ですから、この y の中の x に代入していくのです。

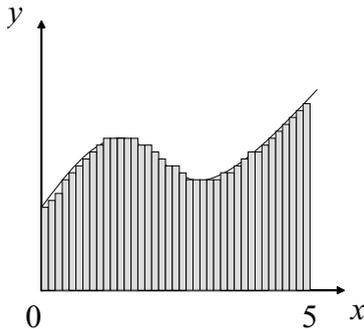
f が x の関数であることを明示するためによく $f(x)$ と書きますよね。これと同様に、 y が x の関数であることを明示するために今 $y(x)$ と書くと、

$$\sum_{x=0}^4 y(x) dx = y(0) dx + y(1) dx + y(2) dx + y(3) dx + y(4) dx$$

です。いいですよ。 y は x の値（グラフ中の位置）によって、変化します。これで上の図の長方形の面積の和が出るのがわかると思います。面積が $y(x)dx$ の長方形を、 x の大きさを 0、1、2... と変えながら足し合わせていくのですから。

しかし、さすがにこれでは実際に求めたい面積からは程遠い値が出てきてしまいますね。「近似の粗さにも程があるだろ」といった感じです。 $dx = 1$ というのはいくらなんでも大き過ぎる。

私は読者のみなさんの視力がアフリカ人並みに良いことを全く期待していません。先ほどの図の中でみなさんに見えるような大きさに dx を書きましたが、実際は、先ほど 0.0001 というイメージだと言ったとおり、訳がわからないほど小さいのです。次の図を見てください。



いや、もっとです。もっともっと小さくしていったのが本物の dx です。そうすると図では描けませんが、想像はできますね。そしてそのとき、 $y(x)$ と dx との積を $x = 0$ から $x = 5$ まで足し合わせたものが、まさしくグラフと x 軸の間の部分の面積になっていることも想像できますね。普段何げなく書いていた

$$\int_0^5 y dx$$

というのは、実はこういう意味なのです。

ここでも、 y は x の値によって変化することに注意してくださいね。 x によって変化する y と、とにかく小さ過ぎる定数 dx の積を足し合わせた結果が面積です。

では、ここまでの話をまとめます。インテグラルはシグマと本質的に同じなので、決して「挟む」ものではない。これに尽きます。なぜ「挟む」だの「挟まない」だの、これほどまでにとり立てて言う必要があるのかと思われるかも知れませんが、「挟む」という先入観の下で物理や数学をやっている人は、自分で積分を自由自在に操っているつもりでいて、そのうち間違いなく破綻を来たしてしまいます。

このことは、この本を読み進めていくうちに、特に電磁気分野で、明らかになります。いいですか。「挟む」と思っていた人は、その考えを早く捨ててください。

どっちが本当の「ゆとり」か？

微分の反対が積分であるということをご存知ですね（この理由は後で説明します）。変位を時間で微分したものが速度、速度を時間で微分したものが加速度でした。ならば、加速度を時間で積分したものが速度、速度を時間で積分したものが変位でしょう。



先ほど、力学における大概の公式は運動方程式から導けると言いました。運

動方程式に含まれるのは加速度ですね。したがって、運動方程式を立てて加速度を求め、それを積分して速度と変位を出すというのが基本になるわけです。

例えば加速度が、

$$\ddot{x} = a$$

であるとしましょう。先ほど関数 y が x の関数であるということを明示するために $y(x)$ という書き方をしたのと同様に、今は \ddot{x} は t の関数なので

$$\ddot{x}(t) = a$$

と書かせてください。これを時間で積分していきます。すると、

$$\dot{x}(t) = at + C$$

となることは知っての通りですね。 C は積分定数です。

\dot{x} は速度でしたが、ここで積分定数 C は初速度を表す、と言ったら理解していただけるでしょうか。理由は、 $t = 0$ のときの速度のことを初速度と呼び、実際に $t = 0$ とすると C のみが残るからです。

$$\dot{x}(0) = C$$

したがって、初速度を v_0 とすれば、

$$\dot{x}(t) = at + v_0$$

と書けます。

さらにもう一度積分します。すると変位 x を表す式が出るので、今度は積分定数は初期位置 x_0 です。

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

さて、これらの式は何でしょうか。教科書で習うあの公式ですよ。変位を微分すれば速度、速度を微分すれば加速度ということは先ほど説明しましたが、すべての受験生は実はそのことを公式として知っているのです。

他の科目、例えば歴史に例えるとこんな感じです。「ゆとり教育は最高なので、高校で人物の苗字まで教えてはいけません」という指令が国から出たします。そこで高校ではこのように教えます。「家康という人がいます。綱吉という人がいます。慶喜という人がいます」と。

そして生徒は混乱します。「家康は確か江戸時代の人だけど、綱吉とか慶喜は何時代の人だっけ」と。みんな苗字が徳川だということを教えてくれさえすれば、全員江戸時代の人だとすぐわかるのに、教えないのです。

現行の高校物理の指導要領はこれと同じなのです。「ゆとり教育は最高なので、高校の物理で微積を教えてはいけません」と言われ、すべての公式に運動方程式という礎があることを教えていないのです。すべての将軍に徳川という苗字があることを教えないのと同じほど、本末転倒な指導要領です。