チャレンジ問題の解答

第1章

基本問題

問題 1

解説

力の定義および工学単位と SI 単位の考え方を理解することにより，単位の換算を行うことができる．

(1) 力の単位を表す 1N とは，1kg の質量の物体に $1\,m/s^2$ の加速度を与える大きさを示している．

$$1\,N = 1\,kg \cdot m/s^2$$

工学単位における力 1kgf は 1kg の質量の物体に $9.80665\,m/s^2$ の加速度を与えるものと定義されている．したがって工学単位から SI 単位への換算は下記のとおり．

$$1\,kgf = 1\,kg \times 9.80665\,m/s^2 = 9.80665\,kg \cdot m/s^2 \approx 9.81\,N$$

これらを理解しておけば，力に関する単位を換算することができる．

(2) 1 平方ミリメートルをメートル単位へ換算するときには，1mm は $0.001\,m = 1 \times 10^{-3}\,m$ であること，その平方（二乗）とは $1\,mm^2 = (1 \times 10^{-3}\,m)^2 = 1 \times 10^{-6}\,m^2$ であることを理解すること．工学単位 kgf から SI 単位 N に換算できれば，この問題の答えを導くことが可能になる．答えには，適切な接頭語 M（メガ $\times 10^6$）を付けるようにする．

(3) (1) と (2) が理解でき，接頭語 M には $\times 10^6$ という意味であることを理解すれば，所定の単位に換算することができる．

解答

(1) 工学単位から SI 単位への変換

$$5\,000\,kgf = 5\,000\,kgf \times 9.8107\,N/kgf = 49\,000\,N = 49.1\,kN$$

(2) 工学単位から SI 単位への変換

$$40\,kgf/mm^2 = 40\,kgf \times 9.8\,N \div (10^{-3}\,m)^2 = 392 \times 10^6\,N/m^2 = 392\,MPa$$

(3) SI 単位から工学単位への変換

$$300\,MPa = 300 \times 10^6\,N/m^2 = 3 \times 10^8 \times 1.02 \times 10^{-7}\,kgf/mm^2 = 30.6\,kgf/mm^2$$

応用問題

問題 2

解説

問題のトラスでは，部材間の角度変化は無視できる．ピン結合のため棒には軸力のみが生じるので，着力点における水平方向と鉛直方向の力のつり合い式を立てて各棒の軸力を求める．

着力点に作用する荷重 P を打ち消す方向に棒の軸力が生じてつり合う．水平方向の力のつり合い式から，各棒の軸力の大きさが等しいことが確認できる．この関係と鉛直方向の力のつり合い式から，棒の軸力 T を求めることができる．

解答

各棒に生じる軸力を T_1，T_2 とおくと，着力点における各方向の力のつり合い式は下記のようになる．

水平方向の力のつり合い：$T_1 \sin\theta = T_2 \sin\theta$ （A1.1）

鉛直方向の力のつり合い：$T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = P$ （A1.2）

ここで，式（A1.1）より $T_1 = T_2 = T$ となり，式（A1.2）は式（A1.3）のように整理できるので，各軸に生じる軸力を求めることができる．

$$2T\cos\theta = P \quad \text{（A1.3）}$$

解答は以下のようになる．

$$T = \frac{P}{2\cos\theta}$$

問題 3

解説

解き方は問題 2 と同じである．ピン結合のため棒には軸力のみが作用するので，着力点における水平方向と鉛直方向の力のつり合いを考えて軸力を求める．ただし，各軸に生じる力は鉛直軸と棒とのなす角度が異なるので，各棒に生じる軸力の大きさが異なる．

解答

各棒に生じる軸力を T_1，T_2 とおくと，着力点における各方向の力のつり合い式は下記のようになる．

水平方向の力のつり合い：$T_1 \sin\theta_1 = T_2 \sin\theta_2$ （A1.4）

鉛直方向の力のつり合い：$T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = P$ （A1.5）

式（A1.4）と式（A1.5）は，未知数を T_1 と T_2 とした二元一次連立方程式である．上記の 2 式から T_1 と T_2 を解く．式（A1.4）より次式が成立し，これを式（A1.5）に代入すれば，T_1 を求めることができる．

$$T_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} T_1 \qquad \text{(A1.4)}'$$

$$T_1\cos\theta_1 + \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2} T_1 = P \qquad \text{(A1.5)}'$$

式（A1.5）′より，T_1 を求めれば，式（A1.6）を得ることができる．

$$T_1 = \frac{P}{\cos\theta_1 + \dfrac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2}} = \frac{P\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1} \qquad (3)$$

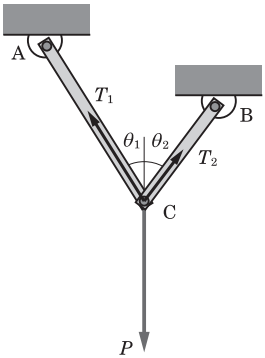
同様に T_2 を求めることができる．ここで，分母は $\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ と置き換えられる．

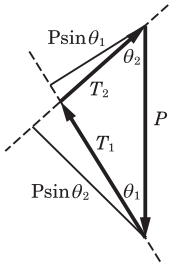
解答

したがって，解答はつぎのとおり．

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{P\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \\ T_2 &= \frac{P\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}\right\}$$

なお，力の三角形より棒の軸力 T_1 と T_2 を求めても解答は同じになる．





第2章

基本問題

問題 1

解説

問題では，荷重条件，材料定数および形状が与えられているので，垂直荷重が作用する棒に生じる応力の定義を理解していれば，応力を求めることができる．さらに，弾性変形している棒の力と変形との関係にはフックの法則が成立することから，棒全長に生じる伸びを求めることができる．

解答

棒に生じる応力は下記のようになる．

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

ここで，A は棒の断面積であり，直径 d の断面積は $A = \frac{\pi d^2}{4}$ となる．問題で与えられている数値（$d = 0.02\,\mathrm{m}$，$P = 100\,\mathrm{kN}$）を上式に代入すれば，応力を求めることができる．

伸びはフックの法則から下記のようになる．

$$\delta = \frac{Pl}{AE}$$

問題で与えられている数値（$E = 210\,\mathrm{GPa}$，$l = 1.5\,\mathrm{m}$）を上式に代入すれば，伸びを求めることができる．したがって，解答は以下のようになる．

応力　$\sigma = 318\,\mathrm{MPa}$

伸び　$\delta = 2.27\,\mathrm{mm}$

※数値計算をするときには単位も考慮する．

問題 2

解説

演習問題 1 と同様，求める物理量の定義をしっかり理解していれば，解答を導くことができる．また力と変形との関係にはあるフックの法則が成立するため，それらの関連を理解すれば問題を解くことができる．

解答

(1) 直径　$d = 0.0338\,\mathrm{m}$（$33.8\,\mathrm{mm}$）

棒の面積 A が与えられているので，直径を以下の式から求めることができる．

$$A=\frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$

棒の直径減少量を求める際には，この断面直径 d が必要になる．

(2) 縦ひずみ　$\varepsilon=70\times10^{-6}$

横ひずみ　$\varepsilon'=-21\times10^{-6}$

棒の長さおよび棒の伸び δ が既知であることから，縦ひずみ ε は下記のとおり．

$$\varepsilon=\frac{\delta}{l}$$

材料定数（ポアソン比）ν が与えられているので，縦ひずみがわかれば，横ひずみ ε' は一義的に決まる．

$$\nu=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon'=-\nu\varepsilon$$

解答は，上の式に所定の値を代入することで求めることができる．

(3) 垂直応力　$\sigma=14.7\,\mathrm{MPa}$

縦弾性係数 E が問題で与えられ，(2) より縦ひずみ ε がわかっているので，棒に生じる応力 σ はフックの法則（以下の式）から求めることができる．

$$\sigma=E\varepsilon$$

この段階では外力が未知数なので，応力の定義からは応力を定めることはできない．

(4) 垂直荷重　$\sigma=13.2\,\mathrm{kN}$

断面積 A は問題で与えられたので，(3) から棒に作用する外力を求めることができる．

$$\sigma=\frac{P}{A} \Rightarrow P=\sigma\cdot A$$

(5) 直径減少量　$\lambda=-0.71\,\mu\mathrm{m}$

ポアソン比と横ひずみの定義から棒の直径減少量を求めることができる．

$$\varepsilon'=\frac{\lambda}{d} \Rightarrow \lambda=\varepsilon' d$$

問題 3

解説

ポンチを用いて穴あけ加工をすれば，ポンチに接する鉄板の肉厚断面にはせん断応力が発生する．せん断応力は下記のように定義されているため，鉄板をくりぬく際にポンチ側面に接する面がどこかがわかれば，力と面積を求めるのに必要な情報が与えられているので，鉄板に生じるせん断応力を求めることができる．

$$\tau=\frac{P}{A}$$

ここで面積 A は，$A=\pi dt$ で表され，この式に数値を代入すれば $A=6.28\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2$ となる．したがってせん断力は $\tau=318\,\mathrm{MPa}$ となる．

解答

$\tau=318\,\mathrm{MPa}$

応用問題

問題 4

解説

圧縮荷重が作用する棒の内力と縮み量との関係にもフックの法則が成立する．このことと求める物理量の定義を理解していれば，問題を解くことができる．

解答

(1) 応力の定義から，応力を求めることができる．圧縮荷重が作用する棒には圧縮応力が生じる．圧縮応力にはマイナス符号を付ける．

$$\sigma=-\frac{P}{A}$$

(2) フックの法則から，ひずみを求めることができる．圧縮荷重により棒は縮むので，ひずみにはマイナス符号を付ける．

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=-\frac{P}{AE}$$

(3) ひずみの定義から変形量（縮み量）を求められる．圧縮荷重による棒の縮み量にはマイナスを付ける．

$$\delta=\varepsilon l=\frac{\sigma}{E}l=-\frac{Pl}{AE}$$

(4) ポアソン比の定義から，横ひずみを求めることができる．ここで，圧縮荷重を受ける棒では，直径方向には膨らむので，横ひずみにはマイナス符号は付かない．

$$\varepsilon'=-\nu\varepsilon=-\nu\frac{\sigma}{E}=\nu\frac{P}{AE}$$

(5) 体積変化量は，変形前後の体積を求め，体積変化量 $\Delta V/V$ を求める．弾性体材料の場合，圧縮荷重が作用した棒の変形後の体積は減少する．

$$\frac{\Delta V}{V_0}=\varepsilon(1-2\nu)=\frac{\sigma}{E}(1-2\nu)=-\frac{P}{AE}(1-2\nu)$$

第3章

基本問題

問題 1

解説

力のつり合いだけで棒の各区間に生じる内力を求めることができる．

均等に力が作用する区間に分けて，各区間（区間 AB，区間 BC，および区間 CD）に生じる力および長さを把握する．全長の伸びは各区間内に生じる伸びの合計である．

各区間の伸びの算出には，下記の式を用いる．

$$\delta_i = \frac{P_i l_i}{AE}$$

ここで各変数に付いている i は各区間 AB，BC，CD に相当している．

解答

・各区間に作用する力

AB 間の左右外側から作用する外力は互いに打ち消すように作用して，つり合っている．各区間には次のような力が作用している．

区間 AB に作用する力（右側）：50 kN，（左側）15 kN − 10 kN + 45 kN = 50 kN

区間 BC に作用する力（右側）：50 kN − 15 kN = 35 kN，（左側）− 10 kN + 45 kN = 35 kN

区間 CB に作用する力（右側）：50 kN − 15 kN + 10 kN = 45 kN，（左側）45 kN

・各区間の変形量

変形量の式に数値を代入すれば，各区間の伸びを求めることができる．

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} l_{AB}}{AE} = \frac{50\,\mathrm{kN} \times 0.6\,\mathrm{m}}{500 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \times 200 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}} = 0.30\,\mathrm{mm}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} l_{BC}}{AE} = \frac{35\,\mathrm{kN} \times 1.0\,\mathrm{m}}{500 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \times 200 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}} = 0.35\,\mathrm{mm}$$

$$\delta_{CB} = \frac{P_{CB} l_{CB}}{AE} = \frac{45\,\mathrm{kN} \times 1.25\,\mathrm{m}}{500 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \times 200 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}} = 0.563\,\mathrm{mm}$$

したがって全長の伸びは下記のとおり．

$$\delta_{total} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CB} = 0.30\,\mathrm{mm} + 0.35\,\mathrm{mm} + 0.563\,\mathrm{mm} = 1.21\,\mathrm{mm}$$

問題 2

解説

この問題は不静定問題である．したがって，力のつり合いと変形の制約条件を考慮して解を求める．

(1) に関しては各棒に生じる応力を求めるため，未知変数を棒 1 および棒 2 に生じる応力をそれぞれ σ_1 と σ_2 として，力のつり合い状態と変形の制約条件を考える．

剛体を介して 3 本（2 種類）の棒に引張り荷重 P が作用すると，外力に相当する内力が各棒に生じる．2 本の棒 1 と棒 2 に生じる内力の合計が，引張り荷重 P と同じになれば力はつり合う．3 本の棒（2 種類）は並列に接続されるという変形の制約条件を考慮することにより，各棒に生じる内力を求める．

(2) に関しては各棒の伸びを求める．この問題では，各棒に生じる内力以外の数値が与えられているので，各棒に生じる応力がわかれば，棒の伸びがわかる．

解答

・力のつり合い

2 本の棒 1 と棒 2 に生じる内力の合計が，引張り荷重 P と同じになれば力はつり合う．したがって，力のつり合い式は各棒に生じる応力 σ_1，σ_2 と，各棒の断面積 A_1，A_2 を用いてつぎのように表現できる．

$$P = 2P_1 + P_2 = 2\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

・棒の変形

3 本の棒（2 種類）は並列に接続され，変形量は同じという制約条件が適用される．

つまり，並列に接合されているということから，3 本の棒の元の長さと変形後の長さは同じと見なしている．したがって，棒 1，棒 2 の変形量あるいはひずみ量は等しくなり，つぎのように表現できる．

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

さらにフックの法則から，上の式は次のように表現できる．

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

・連立方程式

力のつり合い式と変形の制約条件から，未知数 σ_1，σ_2 を求めると，次の式のように表現できる．

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E_1 P}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} \\ \sigma_2 &= \frac{E_2 P}{2E_1 A_1 + E_2 A_2} \end{aligned}\right\}$$

各棒の変形量は等しく $\delta_1=\delta_2=\delta$ と置くことができる．したがって，各棒の伸び δ は次のようになる．

$$\delta=\varepsilon_1 l=\frac{\sigma_1}{E_1}l=\frac{E_1P}{2E_1A_1+E_2A_2}\frac{l}{E_1}=\frac{Pl}{2E_1A_1+E_2A_2}$$

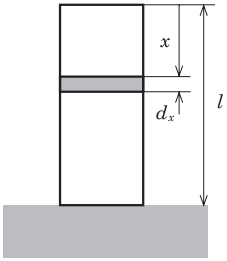
問題 3

解説

直立している長さ l の棒の自重で縮む量を求める問題は，本書の第 3 章例題 3－5 と同じように解くことができる．

この場合，棒上端からの距離を x にとり，位置 x における断面に作用する荷重の大きさを求めることにより，棒の任意断面の応力を求めることができる．

微小長さ dx を考えた領域の伸びを考慮して，棒全体について積分すれば全体の伸びを求めることができる．



解答

(1) 自重のみの場合（a）

・任意の位置に生じる応力

上端から任意の位置 x に対応する断面に作用する荷重は，棒の重さ（密度×重力加速度×体積：ρgAx）である．荷重を面積 A で除すことにより任意の位置における応力 $\sigma(x)$ を求めることができる．ここで求める応力は圧縮応力であるので，マイナス符号がつく．

$$\sigma(x)=-\frac{\rho gAx}{A}=-\rho gx$$

・微小部分のひずみ

微小区間 dx を考えて得られる微小変形量 $d\delta$ はつぎのようになる．

$$\varepsilon(x)=\frac{d\delta}{dx}=\frac{\sigma(x)}{E}$$

$$d\delta=-\frac{\rho gx}{E}dx$$

・棒全体の縮み量

上式を積分して求める．計算結果にマイナス符号が付いているが，変形は縮みであることを示している．

$$\delta=-\int_0^l\frac{\rho gx}{E}dx=-\frac{\rho g}{E}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l=-\frac{\rho gl^2}{2E}$$

(2) 自重と集中荷重の場合 (b)

(1) と同じように解くことができる.

・任意の位置に生じる応力

(1) で考えた自重の他に集中荷重を考慮すると, 任意の位置における応力 $\sigma(x)$ を求めることができる.

$$\sigma(x) = -\left(\rho g x + \frac{P}{A}\right)$$

圧縮応力なので, マイナス符号が付く.

・微小部分のひずみ

微小区間 dx を考えて得られる微小変形量 $d\delta$ はつぎのようになる.

$$\varepsilon(x) = \frac{d\delta}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$d\delta = -\left(\frac{\rho g x}{E} + \frac{P}{AE}\right)dx$$

・棒全体の縮み量

上式を積分して求める. 計算結果にマイナス符号が付いているが, 変形は縮みであることを示している.

$$\delta = -\int_0^l \frac{\rho g x}{E}dx = -\left(\frac{\rho g}{E}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l + \frac{P}{AE}[x]_0^l\right) = -\left(\frac{\rho g l^2}{2E} + \frac{Pl}{AE}\right)$$

問題 4

解説

温度変化量に比例して棒が熱膨張すること, および棒の熱膨張量が拘束されることにより熱応力が発生することを理解すれば解ける問題である.

棒の自由熱膨張量と隙間 δ が等しい. このため, 温度変化量が $\Delta T = \Delta T_1$ であるときの自由熱膨張量はつぎのとおり.

$$\delta_T = \alpha \Delta T_1 l$$

その後の温度変化量 ΔT_2 により生じる熱膨張量が剛体壁によって拘束され, 棒に圧縮の熱応力が生じる. このときの熱応力はつぎのとおり.

$$\sigma_T = -\alpha E \Delta T_2$$

解答

よって, 解答は下記のとおり.

$$\delta = \alpha \Delta T_1 l$$

$$\sigma = -\alpha E \Delta T_2$$

応用問題

問題 5

解説

天井に固定された段付棒がその自重により伸びる量を求める問題も，第 3 章の例題 3－5 と同様な方法で解ける．

この場合は例題 3－5 と同様に，棒下端からの位置 x からの微小長さ dx を考えた微小領域の伸びを考慮すれば，全体の伸びを求めることができる．

ただし，この問題では段付棒を扱うので，下端にある l_2 の棒の伸び δ_2 と上端にある l_1 の棒の伸び δ_1 をそれぞれ独立に求め，$\delta_1+\delta_2$ とすることで段付棒全体の伸び δ を求める．

棒 1，棒 2 の伸びの求め方は基本的には同じだが，l_1 の棒には，l_2 の棒の自重（$\rho g A_2 l_2$）が加わる点に注意する必要がある．

解答

(1) l_2 の棒の伸び（段付棒の下側）

・任意の位置における応力

l_2 の棒下端より距離 x だけ離れた任意断面に生ずる応力 σ_x は，任意断面より下の部分の重さ $\rho g x A$ が作用している．したがって x における応力 $\sigma(x)$ はつぎのようになる．

$$\sigma(x)=\frac{\rho g x A_2}{A_2}=\rho g x$$

・微小領域における変形

任意断面と近接する断面によって切り取られる微小区間における伸びはつぎのとおり．

$$d\delta=\frac{\sigma(x)}{E_2}dx=\frac{\rho g x}{E_2}dx$$

上式を 0～l の区間で積分することにより l_2 の棒の全長の伸びがわかる．

$$\delta_2=\frac{1}{E_2}\int_0^{l_2}(\rho g x)dx=\frac{\rho g {l_2}^2}{2E_2}$$

(2) l_1 の棒の伸び（段付棒の上側）

l_1 の棒の伸びには，l_2 の棒の重量 P（$\rho g A_2 l_2$）が加わる．したがって，この棒の任意の位置の応力，微小区間の伸びおよび全長の棒の伸びはそれぞれ下記のようになる．

応力はつぎのとおり．

$$\sigma(x)=\rho g x+\frac{P}{A_1}=\rho g x+\frac{\rho g A_2 l_2}{A_1}$$

微小区間の伸びはつぎのとおり．

$$d\delta = \frac{\sigma(x)}{E_1}dx = \frac{1}{E_1}\left(\rho g x + \frac{\rho g A_2 l_2}{A_1}\right)dx$$

棒 1 の伸びはつぎのとおり．

$$\delta_1 = \frac{1}{E_1}\int_0^{l_1}\left(\frac{\rho g A_2 l_2}{A_1} + \rho g x\right)dx = \frac{\rho g A_2 l_2}{A_1 E_1}l_1 + \frac{\rho g {l_1}^2}{2E_1}$$

(3) 段付棒全長の伸び

縦弾性係数は $E_1 = E_2 = E$ となるため，全長の伸びはつぎのようになる．

$$\delta_{\text{total}} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\rho g A_2 l_1 l_2}{A_1 E} + \frac{\rho g {l_1}^2}{2E} + \frac{\rho g {l_2}^2}{2E} = \frac{\rho g A_2 l_1 l_2}{A_1 E} + \frac{\rho g({l_1}^2 + {l_2}^2)}{2E}$$

従って，解答は以下のようになる．

$$\delta_{\text{total}} = \frac{\rho g A_2 l_1 l_2}{A_1 E} + \frac{\rho g({l_1}^2 + {l_2}^2)}{2E}$$

問題 6

解説

断面積が場所によって変わる棒の応力や変形を求める際，均一な応力が作用しているとみなすことのできる微小な区間に着目し，その微小区間において，力のつり合い，応力とひずみの関係から方程式を導き，棒の全区間に拡張することによって解を求める．

解答

・任意の断面における応力

棒に生じる内力はどこの断面でも外力と同じ大きさの力が生じ，断面積が連続的に変化する棒内部にも P が生じる．左端からの距離 x により変化する断面積を $A(x)$ という関数で表現できるので位置 x における応力 $\sigma(x)$ はつぎのようになる．

$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)}$$

ここで，断面積を $A(x)$ は矩形断面であり，位置 x における幅 $b(x)$ と厚さ t の積で決まる．ここで，幅 $b(x)$ は下記のように表すことができる．

$$b(x) = \frac{b_1 - b_0}{l}x + b_0$$

したがって，応力 $\sigma(x)$ はつぎのようになる．

$$\sigma(x) = \frac{P}{A(x)} = \frac{P}{b(x)t} = \frac{P}{t\left(\frac{b_1 - b_0}{l}x + b_0\right)}$$

・微小区間の伸び

微小区間における伸び $d\delta$ はフックの法則より求めることができる．棒の縦弾性係数 E を用いるとつぎのようになる．

$$d\delta = \frac{\sigma(x)}{E}dx = \frac{P}{tE\left(\dfrac{b_1 - b_0}{l}x + b_0\right)}dx$$

棒全体の伸び δ は，上式を x について 0 から l まで積分することにより求めることできる．

$$\delta = \frac{P}{tE}\int_0^l \frac{1}{\left(\dfrac{b_1 - b_0}{l}x + b_0\right)}dx = \frac{Pl}{tE(b_1 - b_0)}\ln\frac{b_1}{b_0}$$

上式に数値を代入すれば，解答を得ることになる．

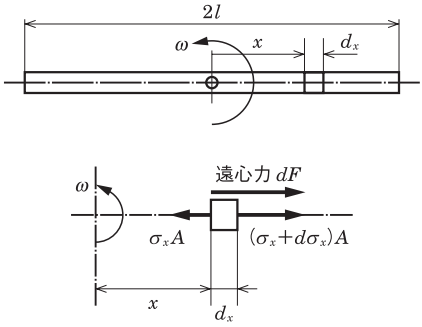
$\delta = 1.68\,\mathrm{mm}$

※積分は数学公式集を参照のこと．

問題 7

解説

図の回転軸の中心を原点として x を図のように取る．x における応力を σ_x とすれば，微小距離 dx だけ離れた $x+dx$ における応力は $\sigma_x + d\sigma_x$ となる．微小区間 x〜$x+dx$ における質量は微小部分の体積が Adx であるので ρAdx である．



棒は角速度 ω で回転するため，微小部分に生じる遠心力 dF は回転半径 x を用いれば次式となる．

$$dF = \rho Adx \times x\omega^2 = \rho Ax\omega^2 dx \qquad \text{(A3.1)}$$

位置 x における力のつり合い式を整理すると，つぎのようになる．

$$\sigma_x A = (\sigma_x + d\sigma_x)A + dF$$

$$d\sigma_x = -\rho\omega^2 x dx \qquad \text{(A3.2)}$$

微分方程式を積分すると，つぎのようになる．

$$\sigma_x = -\frac{1}{2}\rho x^2\omega^2 + C \qquad \text{(A3.3)}$$

ここで $x=l$ のとき $\sigma_x = 0$ であるから $C = \rho\omega^2 l^2/2$ となる．したがって式（A3.3）はつぎのように表せる．

$$\sigma_x = \frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - x^2) \tag{A3.4}$$

最大応力 $\sigma_{\max}$ は，回転中心 $x=0$ で生じるので，つぎのように表現できる．

$$\sigma_{\max} = \frac{\rho\omega^2 l^2}{2} \tag{A3.5}$$

式（A3.4）から棒全長の伸びを求めると，次のようになる．

$$\delta = 2\int_0^l d\delta = 2\int_0^l \frac{d\sigma_x}{E}dx = 2\frac{\rho\omega^2}{2E}\int_0^l (l^2 - x^2)dx = \frac{\rho\omega^2}{E}\left[l^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{2\rho\omega^2 l^3}{3E} \tag{A3.6}$$

解答

棒に生じる最大応力は式（A3.5），棒全長の伸びは式（A3.6）のようになる．

問題 8

解説

温度を ΔT だけ上昇させると棒には熱膨張が生じる．

固定壁を一度ないものと考えると棒の膨張量 δ_{T1} は $\alpha_1 l_1 \Delta T$ となる．ただし，実際は剛体（天井と床）からの反力 P により，この熱膨張量を押し戻して変形前の状態を保つと考えることができる．

棒が熱膨張した分を P という壁からの反力で押し戻すというモデルに置き換えることができるので，棒とばねの変形の制約条件を $\delta_{T1} = \delta_{P1} + \delta_{P2}$ と表せる．ここで，剛体からの反力による棒とばねの縮み量をそれぞれ δ_{P1}，δ_{P2} としている．

力のつり合いと，剛体壁による変形の制約条件から棒の熱応力を求めることができる．さらに，温度変化した後の棒がどの程度変形したかもわかる．

解答

・各材料の自由熱膨張量

各材料の熱膨張量を拘束しなければ，棒の熱膨張量は下記のようになる．

$$\delta_T = \alpha_1 \Delta T l_1$$

・壁からの反力による変形量

直列に結合されている棒とばねには等しい反力（圧縮荷重）P が作用する．このときの荷重 P による棒とばねの変形量 δ_{P1}，δ_{P2} はそれぞれつぎのとおり．

$$\delta_{P1} = \frac{Pl_1}{A_1 E_1},\quad \delta_{P2} = \frac{P}{k}$$

・変形の制約条件と壁からの反力の大きさ

棒が熱膨張した分を P という壁からの反力で押し戻すというモデルに置き換えることができるため，棒とばねの変形の制約条件を $\delta_{T1}=\delta_{P1}+\delta_{P2}$ と表せる．上記の関係式から壁からの反力（圧縮荷重）P を求める．

$$\delta_T=\delta_{P1}+\delta_{P2}$$

$$\alpha_1\Delta T l_1=-\left(\frac{Pl_1}{A_1E_1}+\frac{P}{k}\right)=-\left(\frac{l_1}{A_1E_1}+\frac{1}{k}\right)P$$

$$P=-\frac{\alpha_1 l_1\Delta T}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1}+\dfrac{1}{k}\right)}$$

したがって，棒の応力はつぎのとおり．

$$\sigma_1=-\frac{P}{A_1}=-\frac{\alpha_1 l_1\Delta T}{A_1\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1}+\dfrac{1}{k}\right)}=-\frac{\alpha_1 l_1\Delta T}{\left(\dfrac{l_1}{E_1}+\dfrac{A_1}{k}\right)}=-\frac{\alpha_1 l_1\Delta T}{\left(\dfrac{l_1k}{E_1k}+\dfrac{A_1E_1}{kE_1}\right)}$$

$$=-\frac{\alpha_1 l_1E_1k}{kl_1+A_1E}\Delta T$$

・変形後の長さ

棒の変形後の長さについては，各棒の変形前後の長さの差，つまり棒の熱膨張量から反力 P による変形量を考慮することで得られる．

$$\Delta l_1=\alpha_1\Delta T l_1+\frac{\sigma_1}{E_1}l_1=\left\{\alpha_1\Delta T l_1-\frac{\alpha_1 l_1k}{kl_1+A_1E}\Delta T l_1\right\}=\alpha_1\Delta T l_1\left(1-\frac{l_1k}{kl_1+A_1E}\right)$$

解答

よって答えは，下記のようになる．

$$\sigma_1=-\frac{\alpha_1 l_1E_1k}{kl_1+A_1E}\Delta T$$

$$\Delta l_1=\alpha_1\Delta T l_1\left(1-\frac{l_1k}{kl_1+A_1E}\right)=\alpha_1\Delta T l_1\left(\frac{A_1E}{kl_1+A_1E}\right)$$

問題 9

解説

例題 3－7 と同じように問題を解く．

固定壁を一度ないものと考えると，各棒の膨張量 δ_{T1}，δ_{T2} は $\alpha_1 l_1\Delta T$，$\alpha_2 l_2\Delta T$ で表され，その棒の熱膨張量の和はつぎのようになる．

$$\delta_T=\alpha_1\Delta T l_1+\alpha_2\Delta T l_2$$

ただし，壁からの反力 P が生じるのは，壁が固定されているときだけである．

そのため，問題（1）のように剛体壁が動かない場合は，上記の状態から壁からの反力 P により熱膨張量分だけ圧縮するモデルを考えて，棒に生じる熱応力を求める．

$$\delta_{T1}+\delta_{T1}=\delta_{P1}+\delta_{P2}$$

問題（2）の壁が $\delta=0.1\,\mathrm{mm}$ 動く場合についてはつぎのように考える．

壁が $\delta=0.1\,\mathrm{mm}$ だけ動くということは，棒に生じる $\delta=0.1\,\mathrm{mm}$ 未満の熱変形を壁により拘束できないことを意味する．棒の熱変形を固定しなければ棒に熱応力は生じないため，$\delta_T \leqq \delta=0.1\,\mathrm{mm}$ の条件では，熱応力は発生しない．

ただし，この問題における棒の熱膨張量の和 $\delta_T(\delta_{T1}+\delta_{T2})$ は $0.1\,\mathrm{mm}$ を超えるため，壁が拘束する棒の熱変形量は，棒の熱膨張の和から壁が移動できる分を引いた値（$\delta_{T1}+\delta_{T2}-\delta$）となる．つまり，壁が動く分 δ は壁からの反力 P を受けないと考えて，棒に生じる熱応力を求める．このことはつぎの式を考えて熱応力を求めることになる．

$$\delta_{T1}+\delta_{T2}-\delta=\delta_{P1}+\delta_{P2}$$

解答

（1）の場合

固定壁を一度ないものと考えると各棒の膨張量の和はつぎのようになる．

$$\delta_{T1}+\delta_{T2}=\alpha_1\Delta T l_1+\alpha_2\Delta T l_2$$

直列に結合されている 2 本の棒は，壁からの反力 P を受け，棒に生じた熱膨張量を元の状態に戻したモデルを考える．このときの壁からの反力 P による変形量 δ_{P1}，δ_{P2} はそれぞれ次式で与えられる．

$$\delta_{P1}=\frac{Pl_1}{A_1E_1},\quad \delta_{P2}=\frac{Pl_2}{A_2E_2}$$

棒の両端部が固定されていれば，棒 1，2 の長さの和は不変なので，反力 P が作用して圧縮される各棒の変形量の和 $\delta_{P1}+\delta_{P2}$ と，棒 1，2 の熱膨張量の和 $\delta_{T1}+\delta_{T2}$ は等しくなる．

$$\delta_{T1}+\delta_{T1}=\delta_{P1}+\delta_{P2}$$

したがって，壁からの反力 P はつぎのようになる．

$$P=-\frac{(\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2)}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1}+\dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}\Delta T$$

棒 1，棒 2 の応力は次式となる．

$$\sigma_1=-\frac{P}{A_1}=-\frac{(\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2)}{A_1\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1}+\dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}\Delta T$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A_2} = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{A_2\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}\Delta T$$

上記の式に問題で与えられた数値を代入すると，答えを得ることができる．

棒 1 の応力　$\sigma_1 = -48.6\,\mathrm{MPa}$

棒 2 の応力　$\sigma_2 = -34.4\,\mathrm{MPa}$

(2) の場合

熱応力を求めるときには，壁が動く分 δ では壁からの反力 P を受けないと考えて，棒に生じる熱応力を求める．熱応力はつぎのような式で求められる．

$$\delta_{T1} + \delta_{T2} - \delta = \delta_{P1} + \delta_{P2}$$

この式から P を求めると次のようになる．

$$P = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\Delta T - \delta}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}$$

したがって，棒 1 の応力は次式となり，棒 2 の応力についても同様に求めることができる．

$$\sigma_1 = -\frac{P}{A_1} = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\Delta T - \delta}{A_1\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A_2} = -\frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\Delta T - \delta}{A_2\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)}$$

上記の式に問題で与えられた数値を代入すると，答えを得ることができる．

棒 1 の応力　$\sigma_1 = -33.3\,\mathrm{MPa}$

棒 2 の応力　$\sigma_2 = -23.9\,\mathrm{MPa}$

問題 10

解説

3 本の棒の熱変形を拘束する板や壁がなく，かつ並列に並んでいる状態で温度を ΔT だけ一様に上昇させれば，棒 1 は 2 本とも $\alpha_1 l \Delta T$，棒 2 は $\alpha_2 l \Delta T$ だけ伸びる．ただし，両端の剛体壁で結合されていて，$\alpha_1 < \alpha_2$ という条件が与えられているので，棒 1 に引張り力 P_1，棒 2 に圧縮力 P_2 を加えてつり合う．このつり合い式はつぎのとおり．

$$2P_1 + P_2 = 0$$

棒の両端を剛体壁で固定されていることから，3 本の棒の長さは最終的に同じになる．よって，棒の変形に関する制約条件はつぎのとおり．

$$\delta_{T1}+\delta_{P1}=\delta_{T2}+\delta_{P2}$$

上記の 2 つの関係から壁からの反力がわかり，各棒に生じる熱応力を求めることができる．

解答

つり合い式はつぎのとおり．

$$2P_1+P_2=0$$

また，変形の制約条件を整理すると次のようになる．

$$\delta_{T2}-\delta_{T1}=\delta_{P1}-\delta_{P2}$$

さらに，上記の式をさらに整理するとつぎのようになる．

$$\alpha_2 l\Delta T-\alpha_1 l\Delta T=\frac{P_1 l}{A_1E_1}-\frac{P_2 l}{A_2E_2}$$

ここで $P_1=P$ と置けば，力のつり合い式より $P_2=-2P$ となるため，P について解くことができる．

$$(\alpha_2-\alpha_1)l\Delta T=\left(\frac{Pl}{A_1E_1}+\frac{2Pl}{A_2E_2}\right)$$

上記の式を展開しながら，P について解いていく．

$$\left(\frac{P}{A_1E_1}+\frac{2P}{A_2E_2}\right)=(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T$$

$$\left(\frac{1}{A_1E_1}+\frac{2}{A_2E_2}\right)P=(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T$$

$$P=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{\left(\frac{1}{A_1E_1}+\frac{2}{A_2E_2}\right)}\Delta T=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{\left(\frac{A_2E_2}{A_1E_1A_2E_2}+\frac{2A_1E_1}{A_1E_1A_2E_2}\right)}\Delta T$$

$$=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)A_1E_1A_2E_2}{(2A_1E_1+A_2E_2)}\Delta T$$

各棒に生じる応力はつぎのようになる．

$$\sigma_1=\frac{P}{A_1}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)E_1A_2E_2}{(2A_1E_1+A_2E_2)}\Delta T=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)E_1}{\left(\frac{2A_1E_1}{A_2E_2}+1\right)}\Delta T$$

$$\sigma_2=\frac{-2P}{A_2}=\frac{-2(\alpha_2-\alpha_1)A_1E_1E_2}{(2A_1E_1+A_2E_2)}\Delta T=-\frac{2(\alpha_2-\alpha_1)E_2}{\left(2+\frac{A_2E_2}{A_1E_1}\right)}\Delta T$$

よって解答は下記のようになる．

$$\sigma_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)E_1}{\left(\dfrac{2A_1E_1}{A_2E_2} + 1\right)}\Delta T$$

$$\sigma_2 = -\frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)E_2}{\left(2 + \dfrac{A_2E_2}{A_1E_1}\right)}\Delta T$$

第4章

基本問題

問題 1

解説

式（4.2）と（4.10）より，丸棒の材料の横弾性係数 G は T，l，θ，I_p を用いて，つぎのように表される．

$$G=\frac{Tl}{I_p\theta}$$

上式に，中実丸棒の断面二次極モーメントを表す式（4.9）を代入することにより，上式はつぎのように表される．

$$G=\frac{32Tl}{\pi d_0^4\theta}$$

これに $T=300\,\mathrm{Nm}$，$l=1.2\,\mathrm{m}$，$d_0=30\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$\theta=3.05\times\frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$（ねじり角の単位は rad で扱うことに注意する）を代入すると，

$$G=\frac{32\times300\times1.2}{\pi\times(30\times10^{-3})^4\times3.05\times\frac{\pi}{180}}\fallingdotseq85.0\times10^9\,\mathrm{Pa}=85.0\,\mathrm{GPa}$$

解答

85.0 GPa

問題 2

解説

式（4.2）と（4.10）より，丸棒のねじり角 θ は T，l，G，I_p を用いて，つぎのように表される．

$$\theta=\frac{Tl}{GI_p}$$

上式に，中空丸棒の断面二次極モーメントを表す式（4.15）を代入することにより，上式はつぎのように表される．

$$\theta=\frac{32Tl}{G\pi(d_o^4-d_i^4)}$$

これに $T=200\,\mathrm{Nm}$，$l=0.9\,\mathrm{m}$，$d_o=30\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$d_i=20\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，$G=50\,\mathrm{GPa}$ を代入すると，

$$\theta = \frac{32 \times 200 \times 0.9}{50 \times 10^9 \times \pi \{(30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4\}} \fallingdotseq 0.0564\,\text{rad}\ (= 3.23^\circ)$$

また，棒に生じるせん断応力は棒の表面で最大となり，その大きさは式（4.12）のように表される．ここで，中空丸棒の場合における横断面係数を表す式（4.16）を用いると，式（4.12）はつぎのように表される．

$$\tau_0 = \frac{T}{Z_p} = \frac{T}{\dfrac{\pi}{16 d_o}(d_o^4 - d_i^4)} = \frac{16 d_o T}{\pi (d_o^4 - d_i^4)}$$

これに $T = 200\,\text{Nm}$，$d_o = 30 \times 10^{-3}\,\text{m}$，$d_i = 20 \times 10^{-3}\,\text{m}$ を代入すると，

$$\tau_0 = \frac{16 \times (30 \times 10^{-3}) \times 200}{\pi \{(30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4\}} \fallingdotseq 47.0 \times 10^6\,\text{Pa} = 47.0\,\text{MPa}$$

解答

ねじり角：0.0564 rad（3.23°），せん断応力：47.0 MPa

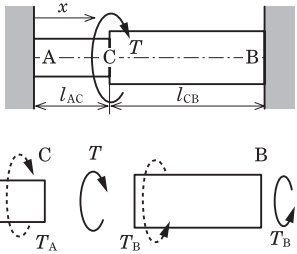
応用問題

問題 3

解説

本問題は不静定問題である．モーメントの作用点（この場合，2 つの棒の接合部）で棒を 2 つに分け，それぞれの棒に作用するねじりモーメントを未知量として問題を解く．その際に，ねじりモーメントに関する条件式とねじり角に関する条件式を用いて未知量を求めていく．

図に示すように，アルミニウム製中実棒（区間 AC）および鋼製中空管（区間 BC）に作用するねじりモーメントをそれぞれ T_A および T_B とすると，2 つの棒に作用するねじりモーメントと外力によるねじりモーメント T とのつり合いはつぎのようになる．



$$T = T_\text{A} - T_\text{B} \qquad \text{(A4.1)}$$

区間 AC，CB の長さを l_{AC}，l_{CB}，横弾性係数を G_{AC}，G_{CB}，断面二次極モーメントを I_{pAC}，I_{pCB} とする．区間 AC および CB の比ねじり角をそれぞれ ϕ_{AC} および ϕ_{CB} とすると，これらは式（4.10）より

$$\phi_{AC} = \frac{T_\text{A}}{G_{AC} I_{pAC}},\quad \phi_{CB} = \frac{T_\text{B}}{G_{CB} I_{pCB}}$$

となるから，点 A に対する点 C のねじり角 θ_{AC} および点 C に対する点 B のねじり角 θ_{CB} は，それぞれつぎのように表される．

$$\theta_{AC}=\phi_{AC}\cdot l_{AC}=\frac{T_A l_{AC}}{G_{AC}I_{pAC}},\quad \theta_{CB}=\phi_{CB}\cdot l_{CB}=\frac{T_B l_{CB}}{G_{CB}I_{pCB}}$$

ここで，棒の両端が固定されていることから，θ_{AC} と θ_{CB} の和として表される点 A に対する点 B のねじり角 θ_{AB} は 0 である．したがって，ねじり角に関する条件式はつぎのように表される．

$$\theta_{AB}=\theta_{AC}+\theta_{CB}=\frac{T_A l_{AC}}{G_{AC}I_{pAC}}+\frac{T_B l_{CB}}{G_{CB}I_{pCB}}=0 \qquad (A4.2)$$

そして，式（A4.1）と式（A4.2）より，T_A と T_B はつぎのように求められる．

$$T_A=\frac{l_{CB}}{\dfrac{G_{CB}I_{pCB}}{G_{AC}I_{pAC}}l_{AC}+l_{CB}}T$$

$$T_B=-\frac{l_{AC}}{l_{AC}+\dfrac{G_{AC}I_{pAC}}{G_{CB}I_{pCB}}l_{CB}}T$$

したがって，接合部におけるねじり角はつぎのように表される．

$$\theta_{AC}=\frac{T_A l_{AC}}{G_{AC}I_{pAC}}$$

$$=\frac{l_{AC}}{G_{AC}I_{pAC}}\cdot\frac{l_{CB}}{\dfrac{G_{CB}I_{pCB}}{G_{AC}I_{pAC}}l_{AC}+l_{CB}}T$$

$$=\frac{l_{AC}\cdot l_{CB}}{G_{CB}I_{pCB}l_{AC}+G_{AC}I_{pAC}l_{CB}}T \qquad (A4.3)$$

ここで，$T=4\,000\,\mathrm{Nm}$，$l_{AC}=1.0\,\mathrm{m}$，$l_{CB}=2.0\,\mathrm{m}$，$G_{AC}=35\,\mathrm{GPa}$，$G_{CB}=82\,\mathrm{GPa}$，$I_{pAC}=\dfrac{\pi}{32}(50\times10^{-3})^4=\dfrac{625}{32}\pi\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$，$I_{pCB}=\dfrac{\pi}{32}\{(60\times10^{-3})^4-(30\times10^{-3})^4\}=\dfrac{1\,215}{32}\pi\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$ であるから，これらを式（A4.3）に代入すると，

$$\theta_{AC}=\frac{l_{AC}\cdot l_{CB}}{G_{CB}I_{pCB}l_{AC}+G_{AC}I_{pAC}l_{CB}}T$$

$$=\frac{1\times2\times4\,000}{(35\times10^9)\times\left(\dfrac{1\,215}{32}\pi\times10^{-8}\right)\times1+(82\times10^9)\times\left(\dfrac{625}{32}\pi\times10^{-8}\right)\times2}$$

$$\fallingdotseq0.0568\,\mathrm{rad}\ (=3.26^\circ)$$

解答

0.0568 rad（3.26°）

問題 4

解説

軸に生じる最大ねじり応力 $\tau_{\max}$ は，式（4.38）より $\tau_{\max}=\dfrac{16T}{\pi d^3}$ である．

安全率を S とするときに，軸の許容せん断応力 τ_a 以下となるように軸を設計するためには，最大ねじり応力が以下を満足しなければならない．

$$\tau_{\max}=\frac{16T}{\pi d^3}\leq\frac{\tau_a}{S}$$

これを d について解くと，

$$d\geq\sqrt[3]{\frac{16ST}{\pi\tau_a}}$$

これに $\tau_a=120\,\mathrm{MPa}$，$S=3$，$T=300\,\mathrm{Nm}$ を代入すると，

$$d\geq\sqrt[3]{\frac{16\times3\times300}{\pi\times120\times10^6}}\fallingdotseq0.0337\,\mathrm{m}=33.7\,\mathrm{mm}$$

よって，軸の最小直径は 33.7 mm である．

解答

33.7 mm

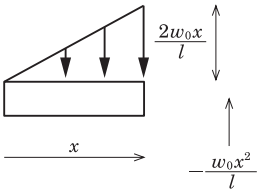
第5章

基本問題

問題 1

図 1

5.5.1 項や 5.5.3 項を参考に解いてほしい．まずは，仮想断面を取る位置の場合分けを考える．$x=l/2$ 前後で荷重の状態が変化することから，$0\leq x\leq l/2$ と $l/2\leq x\leq l$ の 2 つに分けてせん断力および曲げモーメントを求める．



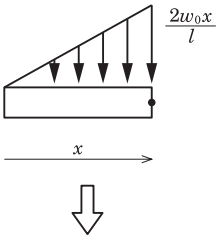
$0\leq x\leq l/2$ のとき

左端より x の位置での分布荷重の大きさは，次の比例関係より求まる．

$$\frac{l}{2}\ :w_0=x:\ ?$$

よって，その大きさは以下のようになる．

$$\frac{2w_0x}{l}$$

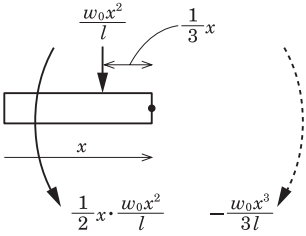


距離 x までの全分布荷重の大きさは三角形の面積に相当し，

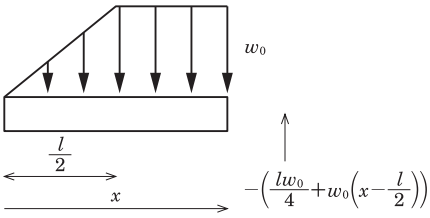
$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2w_0x}{l}=\frac{w_0x^2}{l}$$

である．よって，仮想断面には，つぎの力が図の向きに作用する．

$$F=-\frac{w_0x^2}{l}$$



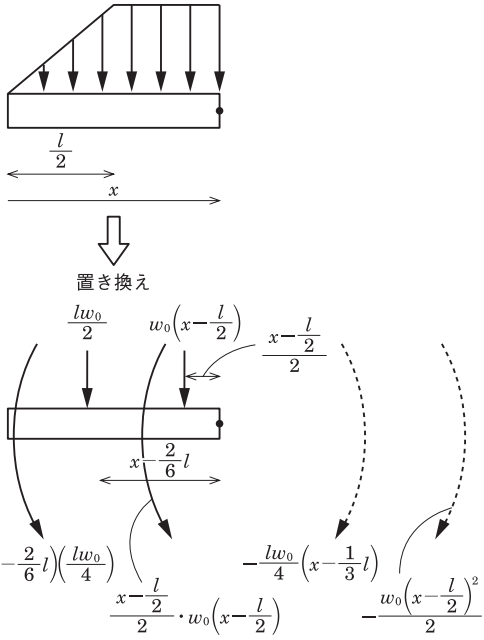
曲げモーメントは，分布荷重を集中荷重に置き換えて考えると，距離 x までの全荷重 $\frac{w_0x^2}{l}$ が仮想断面から左向きに $\frac{1}{3}x$ の位置に作用する．よって，その力で生じるモーメントを止めるように，以下の曲げモーメントが仮想断面に発生する．



$$M_1=-\frac{w_0x^3}{3l}$$

$l/2\leq x\leq l$ のとき

距離 x までの分布荷重の全荷重を求める．それは，分布荷重の面積に相当し，$l/2$ までは三角形の面積，$l/2 \sim x$ までは長方形の面積に相当する．それらの合力と対向するように仮想断面でせん断力が生じ，以下のように求まる．



$$F_2 = -\left(\frac{lw_0}{4} + w_0\left(x-\frac{l}{2}\right)\right)$$

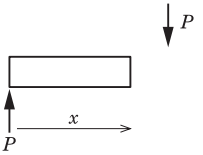
曲げモーメントは，分布荷重を集中荷重に置き換えて考える．ここでは，$l/2$ までの三角形分布と，それ以後の長方形分布に分ける．それぞれの領域における全荷重が，それぞれの領域の重心の位置に集中的に作用すると考え，その合力として，以下のようになる．

$$M_2 = -\frac{lw_0}{4}\left(x-\frac{1}{3}l\right) - \frac{w_0\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}{2}$$

F_1，F_2 および M_1，M_2 を図示して SFD，BMD が求まる．

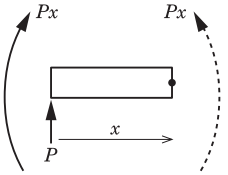
図 2

5.3.1 項や 5.5.1 項を参考に解いてほしい．まずは，仮想断面を取る位置の場合分けを考える．$x=l/4$ の前後で荷重の状態が変化することから，$0 \le x \le l/4$ と $l/4 \le x \le l$ の 2 つに分けてせん断力および曲げモーメントを求める．



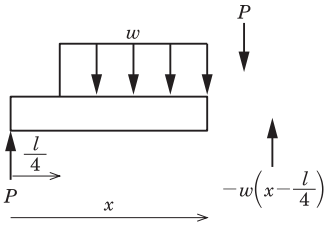
$0 \le x \le l/4$ のとき

仮想断面より左側の要素には，左端に下から上に向かう荷重 P だけが作用しており，そのほかの荷重は作用していない．よって，仮想断面では $F_1 = P$ のせん断力が生じている．



曲げモーメントも同様に，仮想断面を回転中心としたとき，左側の要素に生じるモーメントを止める向きに，

仮想断面に曲げモーメントが生じる．よって，$M_1=P_x$ が求まる．



$l/4\leq x\leq l$ のとき

仮想断面が $l/4$ を超えると，分布荷重が追加される．全分布荷重の大きさを考えて，上下方向の力のつり合いより，せん断力は次のように求められる．

$$F_1=P-w\left(x-\frac{l}{4}\right)$$

曲げモーメントは，分布荷重を集中荷重に置き換えて，それぞれのモーメントを止める向きに，仮想断面に曲げモーメントが生じる．よって以下のように求められる．

$$M_2=P_x-\frac{w\left(x-\frac{l}{4}\right)^2}{2}$$

F_1，F_2 および M_1，M_2 を図示して SFD，BMD が求まる．

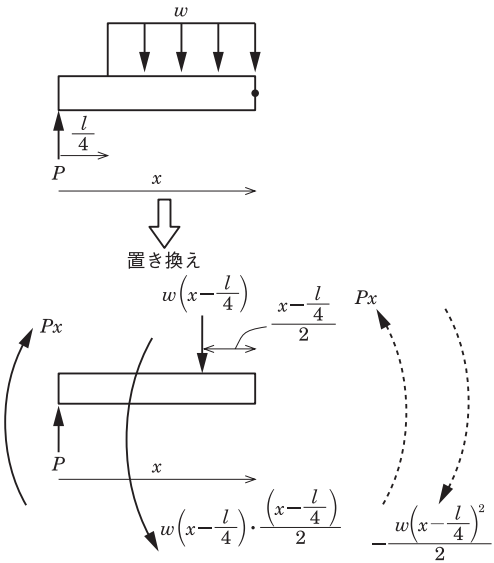


図 3

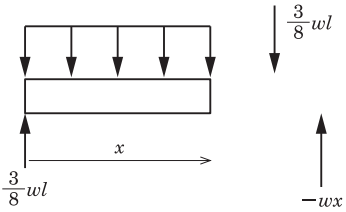
考え方は，5.3.2 項の左側半分と同様である．その前に，両端支持はりであるため，支点反力を求める．上下の力のつり合いより，つぎのようになる．

$$R_A+R_B=\frac{wl}{2}$$

また，A 点回りのモーメントのつり合いより，以下のようになる．

$$-\frac{wl}{2}\cdot\frac{l}{4}+R_Bl=0$$

これより $R_B=\dfrac{wl}{8}$ が求まり，よって $R_A=\dfrac{3}{8}wl$ も求まる．



次に，仮想断面を取る位置の場合分けを考える．$x=l/2$ の前後で荷重の状態が変化することから，$0\leq x\leq l/2$ と $l/2\leq x\leq l$ の 2 つに分けてせん断力

および曲げモーメントを求める．

$0 \leq x \leq l/2$ のとき

せん断力は，上下方向の力のつり合いを考えて，つぎのように求められる．

$$F_1 = \frac{3}{8}wl - wx$$

曲げモーメントは，仮想断面を回転中心と考え，左側の要素に生じるモーメントを止める向きに，仮想断面で曲げモーメントが生じる．よって，以下のように求められる．

$$M_1 = \frac{3}{8}wl \cdot x - wx \cdot \frac{x}{2}$$

$l/2 \leq x \leq l$ のとき

せん断力は，上下方向の力のつり合いより，以下のようになる．

$$F_2 = \frac{3}{8}wl - \frac{wx}{2} = -\frac{1}{8}wl$$

曲げモーメントは，分布荷重を集中荷重に置き換えて考える．仮想断面を回転中心として，左側の要素に作用するモーメントを止める向きに仮想断面に曲げモーメントが生じるため，次のようになる．

$$M_2 = \frac{3}{8}wlx - \frac{wx}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)$$

F_1，F_2 および M_1，M_2 を図示して SFD，BMD が求まる．

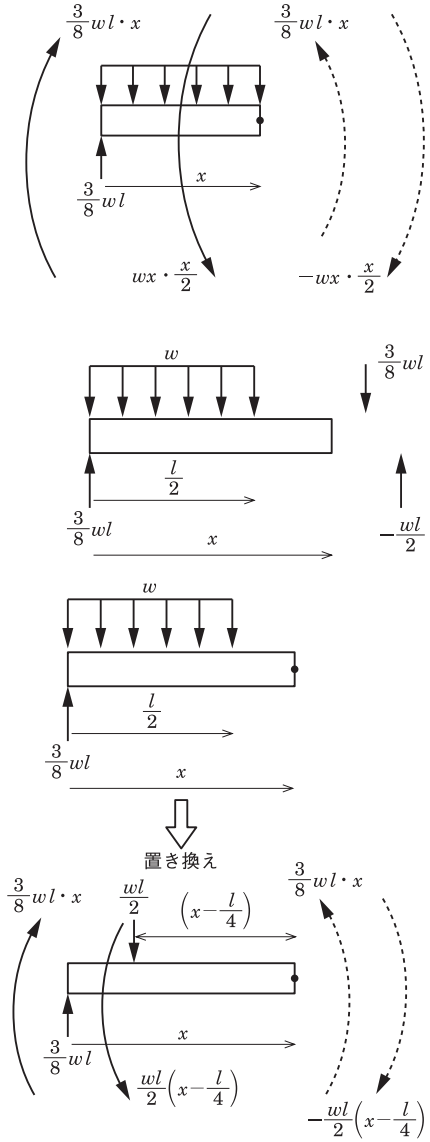


図 4

5.5.4 項を参考に解いてほしい．まずは両端支持はりであるため，支点反力を求める．上下の力のつり合いより，以下のようになる．

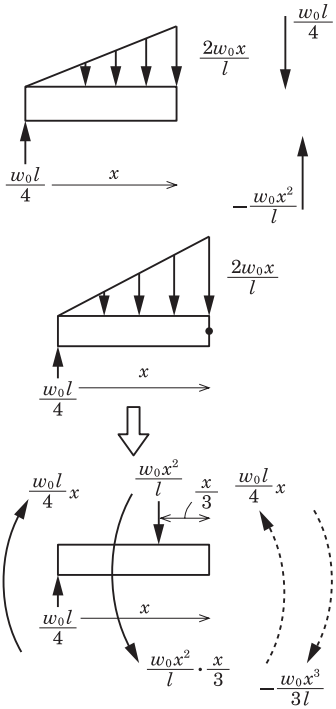
$$R_A + R_B = 2 \times \left(\frac{w_0 l}{4}\right)$$

また，A 点回りのモーメントのつり合いより以下のようになる．

$$-\frac{w_0 l}{2}\times\frac{l}{2}+R_B l=0$$

ここでは，全荷重 $w_0 l/2$ がはり中央部に集中的に作用していると考えてモーメントのつり合いの式を立てている．上式より $R_B=\dfrac{w_0 l}{4}$ が求まり，よって $R_A=\dfrac{w_0 l}{4}$ も求まる．

次に，仮想断面を取る位置の場合分けを考える．$x=l/2$ の前後で荷重の状態が変化することから，$0\le x\le l/2$ と $l/2\le x\le l$ の 2 つに分けてせん断力および曲げモーメントを求める．



$0\le x\le l/2$ のとき

せん断力は上下方向の力のつり合いを考えて，以下のように求まる．

$$F_1=\frac{w_0 l}{4}-\frac{w_0 x^2}{l}$$

曲げモーメントは，分布荷重を集中荷重に置き換えて，以下のようになる．

$$M_1=\frac{w_0 l}{4}x-\frac{w_0 x^2}{3l}$$

ここまでは，5.5.4 項と同様の考えである．

ここで，問題の図の分布荷重は，はり中央部に対して左右対称であるため，せん断力は $0\le x\le l/2$ を $F=0$ の軸に対して上下反転させ，さらに左右に折り返した状態になる（左半分と右半分ではせん断力の符号が変わるだけ）．また，曲げモーメントは，$x=l/2$ に対して左右に折り返した状態になるが，ここでは以下のように厳密に解いてみる．

$l/2\le x\le l$ のとき

せん断力は上下方向の力のつり合いより求まる．今，距離 x までの全分布荷重の大きさを計算すると，左側（$0<x<l/2$）までの三角形部分とそれより右側の台形部分に分けられ

る．それぞれの面積を計算すると次のようになる．

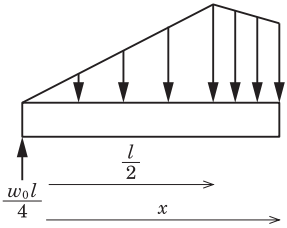
左側三角形：$\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot w_0=\frac{w_0 l}{4}$

右側台形：$\frac{1}{2}\left(w_0+\frac{2w_0(l-x)}{l}\right)\left(x-\frac{l}{2}\right)=\frac{-3w_0l^2+8w_0lx-4w_0x^2}{4l}$

よって，せん断力は両者の合力を考慮して以下のようになる．

$$F_2=\frac{w_0 l}{4}-\frac{w_0 l}{4}-\frac{-3w_0l^2+8w_0lx-4w_0x^2}{4l}=\frac{3w_0l^2-8w_0lx+4w_0x^2}{4l}$$

曲げモーメントは分布荷重を右図のように分けて考え，それぞれを集中荷重に置き換えて考えてみよう．

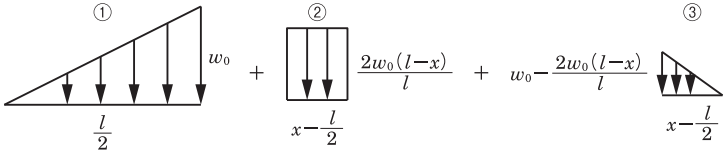


図中①の荷重の大きさ：$\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot w_0=\frac{w_0 l}{4}$　（ⅰ）

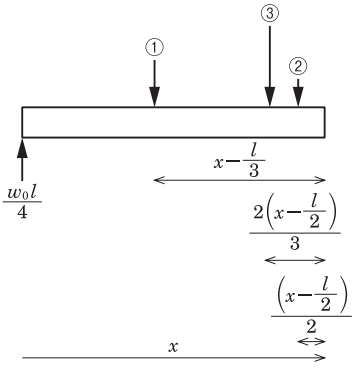
図中②の荷重の大きさ：$\left(x-\frac{l}{2}\right)\left(\frac{2w_0(l-x)}{l}\right)$

$$=-\frac{2w_0}{l}x^2+3w_0x-w_0l \qquad (ⅱ)$$

図中③の荷重の大きさ：$\frac{1}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right)\left(w_0-\frac{2w_0(l-x)}{l}\right)=-w_0x+\frac{w_0 l}{4}+\frac{w_0}{l}x^2$（ⅲ）



それぞれの分布荷重が作用する重心の位置を考えて，仮想断面からの距離を踏まえモーメントを算出し，それらを止める向きに大きさが等しいモーメントとして曲げモーメントが生じる．よって，以下のようにまとめられる．



$$M_2=\frac{w_0 l}{4}x-(ⅰ)\times\left(x-\frac{l}{3}\right)$$

$$-(ⅱ)\times\frac{\left(x-\frac{l}{2}\right)}{2}-(ⅲ)\times\frac{2\left(x-\frac{l}{2}\right)}{2}$$

$$=\frac{w_0}{3l}x^3+w_0x^2-\frac{3}{4}w_0lx-\frac{1}{12}w_0l^2$$

F_1，F_2 および M_1，M_2 を図示して SFD，BMD が求まる．

図 5

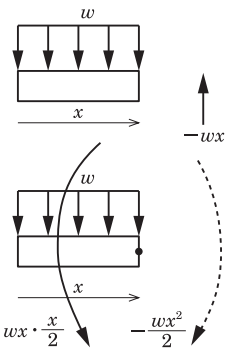
例題 5－3 を参考に考えてほしい．まずは，各支点反力を求める．上下方向の力のつり合いより

$$R_A + R_B = 4aw \qquad \text{(A5.1)}$$

が求まる．また，A 点回りのモーメントのつり合いより

$$-3aw \cdot \frac{3}{2}a + aw \cdot \frac{a}{2} + R_B 2a = 0 \qquad \text{(A5.2)}$$

が求まる．式（A5.2）より $R_B = 2aw$ が求まり，よって $R_A = 2aw$ となる．



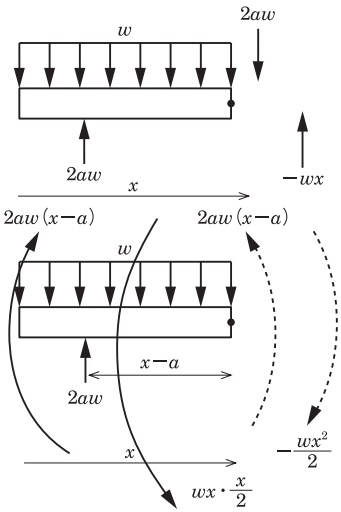
仮想断面の場合分けについて考えると，はりの左端を x の原点として，$x = a$ および $x = 3a$ の前後で荷重の状態が変化する．よって，$0 \le x \le a$，$a \le x \le 3a$，$3a \le x \le 4a$ の 3 つに分けて考える．

$0 \le x \le a$ のとき

せん断力は，上下方向の力のつり合いより $F_1 = -wx$ と求まる．

曲げモーメントは，仮想断面を回転中心と考え，左側の要素に作用する力によるモーメントを止める方向に曲げモーメントが生じるため，以下のようになる．

$$M_1 = \frac{wx^2}{2}$$



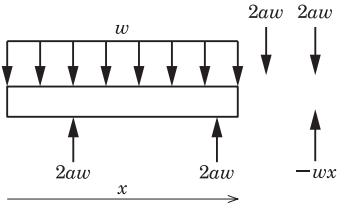
$a \le x \le 3a$ のとき

せん断力は上下方向の力のつり合いを考え，右図より $F_2 = 2aw - wx$ となる．

曲げモーメントも図のように，左側の要素に作用するモーメントを止める向きに仮想断面に生じるため，つぎのようになる．

$$M_2 = 2aw(x-a) - \frac{wx^2}{2}$$

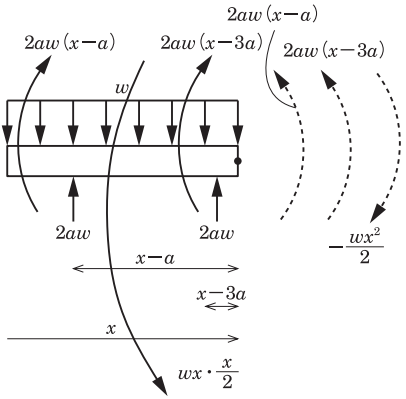
$$= -\frac{wx^2}{2} + (2awx - 2a^2w)$$



$3a \leq x \leq 4a$ のとき

せん断力は上下方向の力のつり合いを考え，30 ページ 1 番下の図より $F_3 = 4aw - wx$ となる．

曲げモーメントも右図のように，左側の要素に作用するモーメントを止める向きに仮想断面に生じるため，以下のようになる．



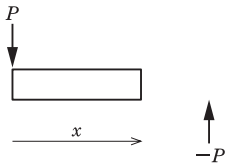
$$M_3 = 2aw(x-a) + 2aw(x-3a) - \frac{wx^2}{2}$$

$$= -\frac{wx^2}{2} + (4awx - 8a^2w)$$

F_1，F_2　F_3 および M_1，M_2，M_3 を図示して SFD，BMD が求まる．

図 6

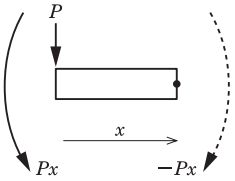
5.3.1 項および 5.6.1 項を参考に解いてほしい．まずは仮想断面の場合分けについて考える．はりの左端を x の原点としたとき，$x = l/2$ の前後で荷重(モーメント)の状態が変化する．よって，$0 \leq x \leq l/2$ と $l/2 \leq x \leq l$ の 2 つに分けて考える．

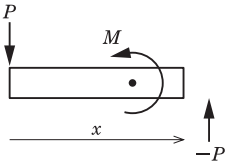


$0 \leq x \leq l/2$ のとき

せん断力は，上下方向の力のつり合いより $F_1 = -P$ となる．

曲げモーメントは，仮想断面を回転中心とし左側の要素に作用する力で生じるモーメントを止める向きに生じるため，図のような関係となり $M_1 = -Px$ となる．



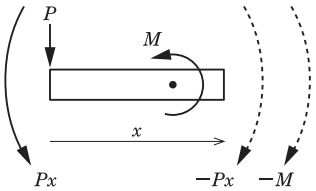


$l/2 \leq x \leq l$ のとき

せん断力は上下方向の力のつり合いより $F_2 = -P$ と求まる．

曲げモーメントは，右図より $M_1 = -Px - M$ となる．

F_1，F_2 および M_1，M_2 を図示して SFD，BMD が求まる．



第6章

基本問題

問題 1

図 1

曲げモーメントの式は，5.5.3 項に導き方が詳しく示してある．参考にしてほしい．ここでは，求めた曲げモーメントの式をたわみの基礎式に代入して，2 回積分を行い，たわみ角およびたわみ量を求める．

曲げモーメントの式は $M=-\dfrac{w_0}{6l}x^3$ より

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{6l}x^3\right) \tag{A6.1}$$

$$\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{24l}x^4+C_1\right) \tag{A6.2}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{120l}x^5+C_1x+C_2\right) \tag{A6.3}$$

ここで，表 6.2 の固定支持の境界条件より $x=l$ で $\theta=0$，$x=l$ で $v=0$ を式（A6.2），式（A6.3）にそれぞれ代入して積分定数 C_1，C_2 を求める．

式（A6.2）に $x=l$ で $\theta=0$ を代入すると，以下のように求められる．

$$0=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{24l}l^4+C_1\right)$$

$$\therefore\quad C_1=-\frac{w_0}{24l}l^3$$

さらに，式（A6.3）に $x=l$ で $v=0$ を代入すると，以下のように求められる．

$$0=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{120l}l^5+\frac{w_0}{24}l^3\cdot l+C_2\right)$$

$$\therefore\quad C_2=-\frac{4w_0}{120}l^4$$

よって，たわみ角，たわみ量の式は最終的に次のようになる．

$$\theta=\frac{w_0}{24EIl}(x^4-l^4)$$

$$v=\frac{w_0}{120EIl}(x^5-5l^4x+4l^5)$$

図 2

曲げモーメントの式の求め方は 5.5.1 項などを参照にしてほしい．仮想断面を取る位置の場合分けでは，はりの左端を x の原点として $x=l/2$ の前後で荷重の状態が変化するため，$0\leq x\leq l/2$ と $l/2\leq x\leq l$ の 2 つに分けて考える．曲げモーメントの式はそれぞれ次のようになる．

$0\leq x\leq l/2$ のとき

$$M_1=-\frac{w}{2}x^2$$

$l/2\leq x\leq l$ のとき

$$M_2=-\frac{wl}{2}\left(x-\frac{l}{4}\right)=-\frac{wl}{2}x+\frac{wl^2}{8}$$

上記 2 式をたわみの基礎式に代入して，それぞれ 2 回積分を行い，境界条件から積分定数を決定していく．

$0\leq x\leq l/2$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_1}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2}x^2\right)$$

$$\theta_1=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{6}x^3+C_1\right) \qquad \text{(A6.4)}$$

$$v_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}x^4+C_1x+C_2\right) \qquad \text{(A6.5)}$$

$l/2\leq x\leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_1}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{2}x-\frac{wl^2}{8}\right)$$

$$\theta_2=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{4}x^2-\frac{wl^2}{8}x+C_3\right) \qquad \text{(A6.6)}$$

$$v_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{12}x^3-\frac{wl^2}{16}x^2+C_3x+C_4\right) \qquad \text{(A6.7)}$$

ここで，C_1〜C_4 の積分定数を決定するために，表 6.2 および $x=l/2$ における荷重の作用点における条件を適用する．すなわち，

ⅰ）$x=l$ で $\theta=0$

ⅱ）$x=l$ で $v=0$

ⅲ）$x=l/2$ で $\theta_1=\theta_2$

ⅳ）$x=l/2$ で $v_1=v_2$

ⅰ）の条件を式（A6.6）に適用して，以下が求められる．

$$0=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{4}l^2-\frac{wl^2}{8}l+C_3\right) \qquad \text{(A6.8)}$$

$$\therefore \quad C_3=-\frac{wl^3}{8}$$

ii）の条件を式（A6.7）に適用して，以下が求められる．

$$0=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{12}l^3-\frac{wl^2}{16}l^2-\frac{wl^2}{8}l+C_4\right) \qquad \text{(A6.9)}$$

$$\therefore \quad C_4=\frac{5}{48}wl^4$$

次に，iii）の条件より，$x=l/2$ で式（A6.4）＝式（A6.6）より，以下が求められる．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{6}\cdot\frac{l^3}{8}+C_1\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{4}\cdot\frac{l^2}{4}-\frac{wl^2}{8}\cdot\frac{l}{2}-\frac{wl^3}{8}\right)$$

$$\therefore \quad C_1=-\frac{7}{48}wl^3$$

最後にiv）の条件より，$x=l/2$ で式（A6.5）＝式（A6.7）より，以下が求められる．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}\cdot\frac{l^4}{16}-\frac{7}{48}wl^3\cdot\frac{l}{2}+C_2\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{wl}{12}\cdot\frac{l^3}{8}-\frac{wl^2}{16}\cdot\frac{l^2}{4}-\frac{wl^3}{8}\cdot\frac{l}{2}+\frac{5}{48}wl^4\right)$$

$$\therefore \quad C_2=\frac{41}{384}wl^4$$

最終的に，たわみ角，たわみ量の式は各範囲でそれぞれ次のようになる．

$0\leq x\leq l/2$ のとき

$$\theta=\frac{w}{48EI}(8x^3-7l^3)$$

$$v=\frac{w}{384EI}(16x^4-56l^3x+41l^4)$$

$l/2\leq x\leq l$ のとき

$$\theta=\frac{wl}{8EI}(2x^2-lx-l^2)$$

$$v=\frac{wl}{48EI}(4x^3-3lx^2-6l^2x+5l^3)$$

図3

曲げモーメントの式は，すでに 5.5.2 項に示してある．ここでは，2 つの曲げモーメントの式をたわみの基礎式に代入して，2 回積分を行い解いていく．

$0 \leq x \leq l/2$ のとき

$$M_1 = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{5}{8}wlx$$

$l/2 \leq x \leq l$ のとき

$$M_2 = \frac{5}{8}wlx - \frac{wl}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) - w\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = -wx^2 + \frac{9}{8}wlx - \frac{1}{8}wl^2$$

$0 \leq x \leq l/2$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}wx^2 - \frac{5}{8}wlx\right)$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}wx^3 - \frac{5}{16}wlx^2 + C_1\right) \qquad \text{(A6.10)}$$

$$v_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}wx^4 - \frac{5}{48}wlx^3 + C_1x + C_2\right) \qquad \text{(A6.11)}$$

$l/2 \leq x \leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left(wx^2 - \frac{9}{8}wlx + \frac{1}{8}wl^2\right)$$

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}wx^3 - \frac{9}{16}wlx^2 + \frac{1}{8}wl^2x + C_3\right) \qquad \text{(A6.12)}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}wx^4 - \frac{9}{48}wlx^3 + \frac{1}{16}wl^2x^2 + C_3x + C_4\right) \qquad \text{(A6.13)}$$

ここで，積分定数 C_1〜C_4 を決定するために，表 6.2 および $x = l/2$ で荷重の作用点における条件を適用する．すなわち，

ⅰ）$x = l$ で $\theta = 0$

ⅱ）$x = l$ で $v = 0$

ⅲ）$x = l/2$ で $\theta_1 = \theta_2$

ⅳ）$x = l/2$ で $v_1 = v_2$

まず，ⅰ）の条件を式（A6.11）に用いて $C_2 = 0$ が求まる．

次に，ⅱ）の条件を式（A6.12）に用いて以下のような式が得られる．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}wl^4 - \frac{9}{48}wl \cdot l^3 + \frac{1}{16}wl^2 \cdot l^2 + C_3l + C_4\right)$$

$$\therefore \quad l \cdot C_3 + C_4 - \frac{1}{24}wl^2 = 0 \qquad \text{(A6.14)}$$

ⅲ）の条件は，$x = l/2$ で式（A6.10）＝式（A6.11）とすると，式（A6.15）が得られる．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}w \cdot \frac{l^3}{8} - \frac{5}{16}wl \cdot \frac{l^2}{4} + C_1\right)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}w\cdot\frac{l^3}{8}-\frac{9}{16}wl\cdot\frac{l^2}{4}+\frac{1}{8}wl^2\cdot\frac{l}{2}+C_3\right)$$

$$\therefore\quad C_1=\frac{1}{48}wl^3+C_3 \tag{A6.15}$$

iv）の条件は $x=l/2$ で式（A6.11）＝式（A6.13）として，式（A6.16）を得る．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}w\cdot\frac{l^4}{16}-\frac{5}{48}wl\cdot\frac{l^3}{8}+C_1\cdot\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12}w\cdot\frac{l^4}{16}-\frac{9}{48}wl\cdot\frac{l^3}{8}+\frac{1}{16}wl^2\cdot\frac{l^2}{4}+C_3\cdot\frac{l}{2}+C_4\right)$$

$$\therefore\quad \frac{l}{2}C_1=\frac{1}{128}wl^4+\frac{l}{2}C_3+C_4 \tag{A6.16}$$

式（A6.15）を式（A6.16）に代入して，式（A6.17）が決まる．

$$\frac{1}{96}wl^4+\frac{l}{2}C_3=\frac{1}{128}wl^4+\frac{l}{2}C_3+C_4$$

$$\therefore\quad C_4=\frac{1}{384}wl^4 \tag{A6.17}$$

式（A6.17）を式（A6.14）に代入して，式（A6.18）が決まる．

$$\therefore\quad C_3=\frac{15}{384}wl^3 \tag{A6.18}$$

式（A6.18）を式（A6.15）に代入すると以下の式が求められる．

$$\therefore\quad C_1=\frac{23}{384}wl^3$$

以上より積分定数は全て求まったため，たわみ角，たわみ量の式は以下のようになる．

$0\le x\le l/2$ のとき

$$\theta=\frac{w}{384EI}\left(64x^3-120lx^2+23l^3\right)$$

$$v=\frac{w_0}{384EI}\left(16x^4-40lx^3+23l^3x\right)$$

$l/2\le x\le l$ のとき

$$\theta=\frac{w}{384EI}\left(128x^3-216lx^2+48l^2x+15l^3\right)$$

$$v=\frac{w}{384EI}\left(32x^4-72lx^3+24l^2x^2+15l^3x+l^4\right)$$

図 4

曲げモーメントの式は，5.6.1 項に示してある．ここでは，曲げモーメントの式をたわみの基礎式に代入して，2 回積分を行い求めていく．曲げモーメントの式は以下のようになる．

$0 \leq x \leq a$ のとき

$$M_1 = \frac{M_0}{l} x$$

$a \leq x \leq l$ のとき

$$M_2 = \frac{M_0}{l} x - M_0$$

$0 \leq x \leq a$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_0}{l}x\right)$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{l}x^2 + C_1\right) \qquad \text{(A6.19)}$$

$$v_1 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{M_0}{l}x^3 + C_1 x + C_2\right) \qquad \text{(A6.20)}$$

$a \leq x \leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_2}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_0}{l}x + M_0\right)$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{l}x^2 + M_0 x + C_3\right) \qquad \text{(A6.21)}$$

$$v_1 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{M_0}{l}x^3 + \frac{1}{2}M_0 x^2 + C_3 x + C_4\right) \qquad \text{(A6.22)}$$

ここで，積分定数 C_1〜C_4 を決定するために，表 6.2 および $x = a$ における荷重の作用点における条件を適用する．

ⅰ）$x = 0$ で $v = 0$

ⅱ）$x = l$ で $v = 0$

ⅲ）$x = a$ で $\theta_1 = \theta_2$

ⅳ）$x = a$ で $v_1 = v_2$

ⅰ）の条件を式（A6.20）に用いて以下が求まる．

$$C_2 = 0$$

ⅱ）の条件を式（A6.22）に用いて式（A6.23）が得られる．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{M_0}{l}l^3 + \frac{1}{2}M_0 l^2 + C_3 l + C_4\right)$$

$$\therefore \quad l\cdot C_3 + C_4 + \frac{1}{3}M_0 l^2 = 0 \tag{A6.23}$$

iii）の条件は，$x=a$ で式（A6.19）＝式（A6.21）として，式（A6.24）を得る．

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{l}a^2 + C_1\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{l}a^2 + M_0 a + C_3\right)$$

$$\therefore \quad C_1 = M_0 a + C_3 \tag{A6.24}$$

iv）の条件は，$x=a$ で式（A6.20）＝式（A6.22）として，式（A6.25）を得る．

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{M_0}{l}a^3 + C_1 a\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{M_0}{l}a^3 + \frac{1}{2}M_0 a^2 + C_3 a + C_4\right)$$

$$\therefore \quad a\cdot C_1 = \frac{1}{2}M_0 a^2 + a\cdot C_3 + C_4 \tag{A6.25}$$

ここで，式（A6.24）を式（A6.25）に代入して，式（A6.26）が求められる．

$$M_0 a^2 + aC_3 = \frac{1}{2}M_0 a^2 + a\cdot C_3 + C_4$$

$$\therefore \quad C_4 = \frac{1}{2}M_0 a^2 \tag{A6.26}$$

式（A6.26）を式（A6.23）に代入して，式（A6.27）が求められる．

$$l\cdot C_3 + \frac{1}{2}M_0 a^2 + \frac{1}{3}M_0 l^2 = 0$$

$$\therefore \quad C_3 = -\frac{M_0}{6l}(3a^2 + 2l^2) \tag{A6.27}$$

式（A6.27）を式（A6.24）に代入して，式（A6.28）が求められる．

$$C_1 = M_0 a - \frac{M_0}{6l}(3a^2 + 2l^2) = -\frac{M_0}{6l}(3a^2 - 6la + 2l^2) \tag{A6.28}$$

これで，積分定数 C_1〜C_4 まで全て求まったため，たわみ角，たわみ量の式は以下のように表される．

$0 \le x \le a$ のとき

$$\theta = -\frac{M_0}{6EIl}(3x^2 + 3a^2 - 6la + 2l^2)$$

$$v = -\frac{M_0}{6EIl}(x^3 + (3a^2 - 6la + 2l^2)x)$$

$a \le x \le l$ のとき

$$\theta = -\frac{M_0}{6EIl}(3x^2 - 6lx + 2l^2 + 3a^2)$$

$$v=-\frac{M_0}{6EIl}(x^3-3lx^2+(2l^2+3a^2)x-3la^2)$$

図5

曲げモーメントの式は，第5章チャレンジ問題の図5を参考にしてほしい．同問題と支点反力が異なるが，基本的な考え方は同じである．まず，ここでは支点反力から求める．

上下方向の力のつり合い式より，以下が得られる．

$$R_A+R_B=3aw$$

A点回りのモーメントのつり合いから，以下が得られる．

$$2aR_B-2aw\cdot a+aw\cdot\frac{a}{2}=0$$

両者を連立して解くことにより，R_A と R_B が求められる．

$$R_B=\frac{3}{4}aw$$

$$R_A=\frac{9}{4}aw$$

曲げモーメントは，以下2つの範囲で場合分けされる．

$0\leq x\leq a$ のとき

$$M_1=-\frac{w}{2}x^2$$

$a\leq x\leq l$ のとき

$$M_2=-\frac{w}{2}x^2+\frac{9}{4}aw(x-a)=-\frac{w}{2}x^2+\frac{9}{4}awx-\frac{9}{4}a^2w$$

上記2式をたわみの基礎式に代入して，2回積分を行う．

$0\leq x\leq a$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_1}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2}x^2\right)$$

$$\theta_1=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{6}x^3+C_1\right) \qquad \text{(A6.29)}$$

$$v_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}x^4+C_1x+C_2\right) \qquad \text{(A6.30)}$$

$a\leq x\leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_2}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2}x^2-\frac{9}{4}awx+\frac{9}{4}a^2w\right)$$

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{6}x^3 - \frac{9}{8}awx^2 + \frac{9}{4}a^2wx + C_3\right) \tag{A6.31}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}x^4 - \frac{9}{24}awx^3 + \frac{9}{8}a^2wx^2 + C_3x + C_4\right) \tag{A6.32}$$

ここで，積分定数 C_1〜C_4 を決定するために，表 6.2 および $x=a$ における荷重の作用点における条件を適用する．すなわち，

ⅰ）$x=a$ で $v=0$

ⅱ）$x=3a$ で $v=0$

ⅲ）$x=a$ で $\theta_1=\theta_2$

ⅳ）$x=a$ で $v_1=v_2$

ⅰ）の条件を式（A6.30）に用いることで，式（A6.33）を得る．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}wa^4 + C_1a + C_2\right)$$

$$\therefore \quad C_1 \cdot a + C_2 = -\frac{1}{24}wa^4 \tag{A6.33}$$

ⅱ）の条件を式（A6.32）に用いて式（A6.34）を得る．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}w \cdot 8a^4 - \frac{9}{24}aw \cdot 27a^3 + \frac{9}{8}a^3w \cdot 9a^2 + C_3 \cdot 3a + C_4\right)$$

$$\therefore \quad 3aC_3 + C_4 = -\frac{81}{24}wa^4 \tag{A6.34}$$

ⅲ）の条件は，$x=a$ で式（A6.29）＝式（A6.31）として式（A6.35）を得る．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}wa^3 + C_1\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}wa^3 - \frac{9}{8}awa^2 + \frac{9}{4}a^2wa + C_3\right)$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{9}{8}wa^2 + C_3 \tag{A6.35}$$

ⅳ）の条件は，$x=a$ において式（A6.30）＝式（A6.32）として式（A6.36）を得る．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}wa^4 + C_1 \cdot a + C_2\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}wa^4 - \frac{9}{24}awa^3 + \frac{9}{8}a^2wa^2 + C_3 \cdot a + C_4\right)$$

$$\therefore \quad C_1 \cdot a + C_2 = \frac{18}{24}wa^4 + C_3 \cdot a + C_4 \tag{A6.36}$$

式（A6.33）を式（A6.36）に代入して式（A6.37）となり，

$$C_3 \cdot a + C_4 = -\frac{19}{24}wa^4 \tag{A6.37}$$

式（A6.34）と式（A6.36）の両辺を引き算することで，C_3 が求められる．

$$2a \cdot C_3 = -\frac{62}{24} wa^4$$

$$\therefore \quad C_3 = -\frac{31}{24} wa^3$$

C_4 が以下のようになるので，C_1，C_2 も求められる．

$$C_4 = \frac{12}{24} wa^4$$

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{4}{24} wa^3, \quad C_2 = \frac{3}{24} wa^4$$

これで，積分定数 C_1〜C_4 まで全て求まったため，たわみ角，たわみ量の式は以下のように表される．

$0 \leq x \leq a$ のとき

$$\theta = \frac{w}{6EI} (x^3 - a^3)$$

$$v = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4a^3 x + 3a^4)$$

$a \leq x \leq l$ のとき

$$\theta = \frac{w}{24EI} (4x^3 - 27ax^2 + 54a^2 x + 31a^3)$$

$$v = \frac{w}{24EI} (x^4 - 9ax^3 + 27a^2 x^2 - 31a^3 x - 12a^4)$$

図 6

はりは，中央に関して対称であるため，各支点反力はそれぞれ $R_A = R_B = P$ である．曲げモーメントは本書第 5 章のチャレンジ問題の図 5 を参考にしてほしい．荷重の変化を考えて，仮想断面を取る場合分けは，$0 \leq x \leq a$，$a \leq x \leq 3a$，$3a \leq x \leq l$ の 3 つに分けて考える．

$0 \leq x \leq a$ $\quad M_1 = -Px$

$a \leq x \leq 3a$ $\quad M_2 = -Pa$

$3a \leq x \leq l$ $\quad M_3 = Px - 4Pa$

これらの曲げモーメントの式をたわみの基礎式に代入して，それぞれ 2 回積分を行う．

$0 \leq x \leq a$ のとき

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI} (Px)$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Px^2 + C_1\right) \tag{A6.38}$$

$$v_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Px^3 + C_1x + C_2\right) \tag{A6.39}$$

$a \leq x \leq 3a$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI}(Pa)$$

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(Pax + C_3) \tag{A6.40}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Pax^2 + C_3x + C_4\right) \tag{A6.41}$$

$3a \leq x \leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI}(-Px + 4Pa)$$

$$\theta_3 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}Px^2 + 4Pax + C_5\right) \tag{A6.42}$$

$$v_3 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}Px^3 + 2Pax^2 + C_5x + C_6\right) \tag{A6.43}$$

ここで，C_1〜C_6 の積分定数を決定するための境界条件を考える．表 6.2 および $x = a$ と $x = 3a$ における荷重の作用点における条件を適用する．また，必要なら $x = 2a$ で対称条件を用いることも可能である．ここでは，対称条件を利用して計算を容易にしている．すなわち，

ⅰ）$x = 0$ で $\theta = 0$
ⅱ）$x = 3a$ で $v = 0$
ⅲ）$x = 2a$ で $\theta = 0$（対称条件）
ⅳ）$x = a$ で $\theta_1 = \theta_2$
ⅴ）$x = a$ で $v_1 = v_2$

ⅰ）の条件では $x = a$ を式（A6.39）に代入して式（A6.44）が求められる．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Pa^3 + C_1 \cdot a + C_2\right)$$

$$\therefore \quad C_1 \cdot a + C_2 = -\frac{1}{6}Pa^3 \tag{A6.44}$$

ⅱ）の条件では，$x = 3$a を式（A6.41）に代入して，式（A6.45）が求められる．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Pa \cdot 9a^2 + C_3 \cdot 3a + C_4\right)$$

$$\therefore \quad C_3 \cdot 3a + C_4 = -\frac{9}{2}Pa^3 \qquad \text{(A6.45)}$$

iii）の条件では，$x = 2a$ を式（A6.41）に代入して，式（A6.46）を求める．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(Pa \cdot 2a + C_3\right)$$

$$\therefore \quad C_3 = -2Pa^2 \qquad \text{(A6.46)}$$

さらに，式（A6.46）を式（A6.45）に代入することにより，式（A6.47）を求められる．

$$\therefore \quad C_4 = \frac{3}{2}Pa^3 \qquad \text{(A6.47)}$$

iv）の条件では，$x = a$ において式（A6.38）＝式（A6.40）とすると，以下のようになる．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Pa^2 + C_1\right) = \frac{1}{EI}\left(Pa \cdot a - 2Pa^2\right)$$

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{3}{2}Pa^2$$

v）の条件では，$x = a$ において式（A6.39）＝式（A6.41）として，以下が求められる．

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Pa^3 - \frac{3}{2}Pa^2 \cdot a + C_2\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}Pa \cdot a^2 - 2Pa^2 \cdot a + \frac{3}{2}Pa^3\right)$$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{4}{3}Pa^3$$

題意より，はりの左端であるA点でのたわみ角は，θ_1 において $x = 0$ とし，たわみ量は v_1 において $x = 0$ とすればよい．

$$\theta_1 = \frac{P}{2EI}(x^2 - 3a^2)$$

より，以下のようになる．

$$\theta_{x=0} = -\frac{3}{2EI}Pa^2$$

$$v_1 = \frac{P}{6EI}(x^3 - 9ax + 8a^3)$$

より，以下が求められる．

$$v_{x=0} = \frac{4}{3EI}Pa^3$$

さらに，中央部 $x = 2a$ でにおけるたわみ量は，v_2 において $x = 2a$ とすればよく，v_2

$= \dfrac{Pa}{2EI}(x^2 - 4ax + 3a^2)$ より，以下が求められる．

$$v_{x=2a} = -\frac{1}{2EI}Pa^3$$

マイナスを示していることから，中央部は上側にたわんでいることがわかる．

第7章

基本問題

問題 1

例題 7–1 を参考に解いてほしい．まずは各支点反力を求める．上下の力のつり合い式および A 点回りのモーメントのつり合い式をたてると次のようになる．

$$R_A + R_B = \frac{1}{2} w_0 l \tag{A7.1}$$

$$R_A l - \frac{1}{2} w_0 l \cdot \frac{2}{3} l - M_B = 0 \tag{A7.2}$$

R_A，R_B，M_B の 3 つが未知数であるが，関係式は 2 式であるため未知数が決まらず，不静定問題となる．ここでは，未知数を含んだ曲げモーメントの式を用いて，たわみの基礎式より解いていくこととする．

曲げモーメントの式は $M = -\frac{w_0}{6l} x^3 + R_A x$ である．これを，たわみの基礎式に代入して 2 回積分を行う．

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{6l} x^3 - R_A x\right)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{24l} x^4 - \frac{1}{2} R_A x^2 + C_1\right) \tag{A7.3}$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{120l} x^5 - \frac{1}{6} R_A x^3 + C_1 x + C_2\right) \tag{A7.4}$$

ここで，C_1，C_2 および R_A を決定する境界条件は，表 6.2 である．すなわち，以下のようになる．

ⅰ）$x = 0$ で $v = 0$
ⅱ）$x = l$ で $\theta = 0$
ⅲ）$x = l$ で $v = 0$

ⅰ）の条件を式（A7.4）に用いて，以下が求められる．

$C_2 = 0$

ⅱ）の条件を式（A7.3）に用いて，式（A7.5）を得る．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{24l} l^4 - \frac{1}{2} R_A l^2 + C_1\right)$$

$$\therefore\ C_1 - \frac{1}{2} R_A l^2 = -\frac{1}{24} w_0 l^3 \tag{A7.5}$$

ⅲ）の条件を式（A7.4）に用いて，式（A7.6）を得る．

$$0=\frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{120l}l^5-\frac{1}{6}R_Al^3+C_1l\right)$$

$$\therefore\ C_1l-\frac{1}{6}R_Al^3=-\frac{1}{120}w_0l^4 \qquad \text{(A7.6)}$$

式（A7.5）$\times l$ − 式（A7.6）より R_A が求まり，$R_A=\frac{1}{10}w_0l$ となる．

R_A が求められれば，式（A7.1）および式（A7.2）から R_B と M_B はそれぞれ

$$R_B=\frac{2}{5}w_0l$$

$$M_B=\frac{1}{15}w_0l^2$$

となる．また，C_1 は式（A7.5）より $C_1=\frac{1}{120}wl^3$ と求まる．よって，たわみ角，たわみ量の式はそれぞれ次のようになる．

$$\theta=\frac{w_0}{120EIl}(5x^4-6l^2x^2+l^4)$$

$$v=\frac{w_0}{120EIl}(x^5-2l^2x^3+l^4x)$$

問題 2

例題 7－2 を参考に解いてほしい．各支点反力および壁の固定モーメントの向きを図のように定めて，曲げモーメントの式を求める．まずは，各支点反力を求める．上限の力のつり合い式は式（A7.6）となる．

$$R_A+R_B=0 \qquad \text{(A7.6)}$$

A 点回りのモーメントのつり合い式は式（A7.7）となる．

$$M_A+M_0-M_B+R_B\cdot l=0 \qquad \text{(A7.7)}$$

曲げモーメントは $x=a$ の前後で 2 つに場合分けされ，$0\le x\le a$，$a\le x\le l$，でそれぞれ求めると次のようになる．

$0\le x\le a$ のとき

$$M_1=R_Ax-M_A$$

$a\le x\le l$ のとき

$$M_2=R_Ax-M_A-M_0$$

上記 2 式をたわみの基礎式に代入して，それぞれ 2 回積分を行う．

$0\le x\le a$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_1}{EI} = \frac{1}{EI}(-R_A x + M_A)$$

$$\theta_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_A x^2 + M_A x + C_1\right) \qquad \text{(A7.8)}$$

$$v_1 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2\right) \qquad \text{(A7.9)}$$

$a \leq x \leq l$ のとき

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_2}{EI} = \frac{1}{EI}(-R_A x + M_A + M_0)$$

$$\theta_2 = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_A x^2 + M_A x + M_0 x + C_3\right) \qquad \text{(A7.10)}$$

$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_A x^2 + \frac{1}{2}M_A x^2 + \frac{1}{2}M_0 x^2 + C_3 x + C_4\right) \qquad \text{(A7.11)}$$

ここで，C_1〜C_4 の積分定数および R_A，M_A を決定する境界条件を考える．本書の第6章，表6.2 固定支持の境界条件と荷重の作用点における条件が適用できる．すなわち以下のようになる．

i）$x=0$ で $\theta=0$
ii）$x=0$ で $v=0$
iii）$x=l$ で $\theta=0$
iv）$x=l$ で $v=0$
v）$x=a$ で $\theta_1=\theta_2$
vi）$x=a$ で $v_1=v_2$

i）の条件を式（A7.8）に用いて $C_1=0$ が求まる．
ii）の条件を式（A7.9）に用いて $C_2=0$ が求まる．
iii）の条件を式（A7.10）に用いて，式（A7.12）を得る．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_A l^2 + M_A l + M_0 l + C_3\right)$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}R_A l^2 + M_A l + C_3 = -M_0 l \qquad \text{(A7.12)}$$

iv）の条件を式（A7.11）に用いて，式（A7.13）を得る．

$$0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_A l^3 + \frac{1}{2}M_A l^2 + \frac{1}{2}M_0 l^2 + C_3 l + C_4\right)$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{6}R_A l^3 + \frac{1}{2}M_A l^2 + C_3 \cdot l + C_4 = -\frac{1}{2}M_0 l^2 \qquad \text{(A7.13)}$$

v）の条件は，$x=a$ において式（A7.8）＝式（A7.10）として，式（A7.14）が求め

られる．

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_A a^2+M_A a\right)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}R_A a^2+M_A a+M_0 a+C_3\right)$$

$$\therefore\quad C_3=-M_0 a \qquad \text{(A7.14)}$$

vi）の条件は $x=a$ において式（A7.9）＝式（A7.11）として式（A7.15）が求められる．

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_A a^3+\frac{1}{2}M_A a^2\right)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}R_A a^3+\frac{1}{2}M_A a^2+\frac{1}{2}M_0 a^2-M_0\cdot a\cdot a+C_4\right)$$

$$\therefore\quad C_4=\frac{1}{2}M_0 a^2 \qquad \text{(A7.15)}$$

式（A7.14）と式（A7.15）を，式（A7.12），式（A7.13）に代入して整理すると，式（A7.16），式（A7.17）となる．

$$-\frac{1}{2}R_A l^2+M_A l=-M_0(l-a) \qquad \text{(A7.16)}$$

$$-\frac{1}{6}R_A l^3+\frac{1}{2}M_A l^2=-\frac{1}{2}M_0(l-a)^2 \qquad \text{(A7.17)}$$

式（A7.16）$\times l/2$－式（A7.17）より R_A が次のように求められる．

$$R_A=\frac{6}{l^3}M_0\cdot a(l-a)$$

式（A7.6）より R_B は

$$R_B=-\frac{6}{l^3}M_0\cdot a(l-a)$$

と求められ，M_A は式（A7.16）に R_A を代入して以下のようになる．

$$M_A=-M_0+\frac{4}{l}M_0 a-\frac{3}{l^2}M_0 a^2$$

また，M_B も式（A7.7）より以下のように求められる．

$$M_B=-\frac{2}{l}M_0 a+\frac{3}{l^2}M_0 a^2$$

問題 3

例題 7－3 を参考に解いてほしい．4 支点の連続はりであるため，3 モーメントの式を支点 1，2，3 と支点 2，3，4 の 2 回適用して，両者を連立することにより，M_2，M_3 が求まる．

支点 1，2，3 について式（A7.18）を得る．

$$lM_1+2(l+l)M_2+lM_3=6EI\left(-\frac{wl^3}{24EI}-\frac{wl^3}{24EI}\right)$$

$$\therefore\quad lM_1+4lM_2+lM_3=-\frac{wl^3}{2} \tag{A7.18}$$

支点 2，3，4 については，式（A7.19）を得る．

$$lM_2+2(l+l)M_3+lM_4=6EI\left(-\frac{wl^3}{24EI}-0\right)$$

$$\therefore\quad lM_2+4lM_3+lM_4=-\frac{wl^3}{4} \tag{A7.19}$$

ここで，M_1 および M_4 ははりの両端であるため，モーメントは 0 である．よって，式（A7.18）および式（A7.19）は次のように示される．

$$4lM_2+lM_3=-\frac{wl^3}{2} \tag{A7.20}$$

$$lM_2+4lM_3=-\frac{wl^3}{4} \tag{A7.21}$$

両者を連立して解くことにより，M_2 および M_3 が以下のように求められる．

$$M_2=-\frac{7}{60}wl^2$$

$$M_3=-\frac{1}{30}wl^2$$

次に各支点反力を求める．式（7.28）を参考にするとよい．

$$R_1=0+\frac{0-0}{\infty}+\frac{1}{2}wl+\frac{\left(-\frac{7}{60}wl^2\right)-0}{l}=\frac{23}{60}wl$$

$$R_2=\frac{1}{2}wl+\frac{0-\left(-\frac{7}{60}wl^2\right)}{l}+\frac{1}{2}wl+\frac{\left(-\frac{1}{30}wl^2\right)-\left(-\frac{7}{60}wl^2\right)}{l}=\frac{72}{60}wl$$

$$R_3=\frac{1}{2}wl+\frac{\left(-\frac{7}{60}wl^2\right)-\left(-\frac{1}{30}wl^2\right)}{l}+0+\frac{0-\left(-\frac{1}{30}wl^2\right)}{l}=\frac{27}{60}wl$$

$$R_4=0+\frac{\left(-\frac{1}{30}wl^2\right)-0}{l}+0+\frac{0-0}{\infty}=-\frac{2}{60}wl$$

ちなみに，$R_1+R_2+R_3+R_4$ は分布荷重の全体の大きさ $2wl$ と一致する．

問題 4

例題 7－3 およびチャレンジ問題 3 を参考に解いてほしい．4 支点による連続はりであるため，3 モーメントの式を支点 1，2，3 および支点 2，3，4 の 2 回適用する．荷重は各はりの中央部に集中荷重として作用しているため，例題 6－6 において $a=b=\dfrac{1}{2}$ の場合に相当する．よってそれぞれの 3 モーメントの式は次のようになる．

支点 1，2，3：

$$lM_1+2(l+l)M_2+lM_3=6EI\left(-\frac{Pl^2}{16EI}-0\right)$$

$$\therefore\quad lM_1+4lM_2+lM_3=-\frac{3}{8}Pl^2 \tag{A7.22}$$

支点 2，3，4：

$$lM_2+2(l+l)M_3+lM_4=6EI\left(0-\frac{Pl^2}{16EI}\right)$$

$$\therefore\quad lM_2+4lM_3+lM_4=-\frac{3}{8}Pl^2 \tag{A7.23}$$

ここで，M_1 および M_4 ははりの両端であるため，モーメントは 0 である．そのため①式および②式は次のようにまとめられる．

$$4lM_2+lM_3=-\frac{3}{8}Pl^2 \tag{A7.24}$$

$$lM_2+4lM_3=-\frac{3}{8}Pl^2 \tag{A7.25}$$

両者を連立して解くことにより，M_2 および M_3 は以下のように求められる．

$$M_2=-\frac{3}{40}Pl$$

$$M_3=-\frac{3}{40}Pl$$

次に各支点反力を求める．式（7.28）を参考にするとよい．

$$R_1=0+\frac{0-0}{\infty}+\frac{1}{2}P+\frac{\left(-\frac{3}{40}Pl\right)-0}{l}=\frac{17}{40}P$$

$$R_2=\frac{1}{2}P+\frac{0-\left(-\frac{3}{40}Pl\right)}{l}+0+\frac{\left(-\frac{3}{40}Pl\right)-\left(-\frac{3}{40}Pl\right)}{l}=\frac{23}{40}P$$

$$R_3 = 0 + \frac{\left(-\frac{3}{40}Pl\right) - \left(-\frac{3}{40}Pl\right)}{l} + \frac{1}{2}P + \frac{0 - \left(-\frac{3}{40}Pl\right)}{l} = \frac{23}{40}P$$

$$R_4 = \frac{1}{2}P + \frac{\left(-\frac{3}{40}Pl\right) - 0}{l} + 0 + \frac{0-0}{\infty} = \frac{17}{40}wl$$

ちなみに，$R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ は集中荷重の合力 $2P$ と一致する．

第8章

基本問題

問題 1

モールの応力円で考えてみよう（問題 1 の図）.

この問題は x 軸と y 軸に対応する応力 σ_x，σ_y，τ_{xy} が与えられていて，主軸方向や主応力を求める問題ではなく，それらが初めからわかっている場合の問題である.

モールの応力円は（20，0）を中心とした半径 60 の円である.

① σ_1 が作用する面から時計回りに 30° 傾いた面での応力は，σ 軸から時計回りに 2×30° 円上を移動した点の値を求めればよいから，

$$\sigma_{30^\circ} = (20) + (60)\cos(2\times 30^\circ) = 50.0\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = (60)\sin(2\times 30^\circ) = 30\sqrt{3} \fallingdotseq 52.0\,\mathrm{MPa}$$

② 最大せん断応力は σ 軸から $2\varphi_s = \mp 90^\circ$ すなわち $\varphi_s = \mp 45^\circ$ で生じ，

最大せん断応力 $|\tau|_{\max} = 60\,\mathrm{MPa}$

問題 2

モールの応力円を描いて計算する（問題 2 の図）.

σ 軸を水平右向きに，τ 軸を鉛直下向きにとる．指定された応力を用いて，2 点 A，B を A(50，40)，B(−10，−40) のようにとり，線分 AB を直径とする円を描く.

モールの応力円を描けば，その中心 C(σ_m，0) と半径 R を求めることができる.

$$\sigma_m = \frac{(50)+(-10)}{2} = 20.0,\quad R = \sqrt{\left\{\frac{(50)-(-10)}{2}\right\}^2 + 40^2} = 50.0$$

モールの応力円の図より，

$$2\alpha = \angle \mathrm{AC}\sigma = \tan^{-1}\left(\frac{40}{50-20}\right)$$

例題 8−4 を参照して α を決めると，$2\alpha \fallingdotseq 53.1^\circ$　　$\therefore$　$\alpha \fallingdotseq 26.6^\circ$

① モールの応力円と σ 軸との交点より，

最大主応力：$\sigma_1 = 70\,\mathrm{MPa}$，第 1 主軸方向 $\varphi_1 = 26.6^\circ$

最小主応力：$\sigma_2 = -30\,\mathrm{MPa}$，第 2 主軸方向 $\varphi_2 = 26.6 + 90 = 116.6^\circ$

② モールの応力円の図より，

最大せん断応力 $\tau_1 = 50.0\,\mathrm{MPa}$，$\varphi_{S1} = \dfrac{(53.1^\circ)-(90^\circ)}{2} = -18.4^\circ$ または

$$\varphi_{S1} = \frac{(53.1^\circ)+(270^\circ)}{2} = 161.6^\circ \text{ いずれでもよい.}$$

最小せん断応力 $\tau_2 = -50.0\,\mathrm{MPa}$，$\varphi_{S2} = \dfrac{(53.1^\circ) + (90^\circ)}{2} = 71.6^\circ$

問題 3

モールのひずみ円を描くための 2 点 A，B はつぎのように与えられる．

A$(4.5\times10^{-5},\ 8.0\times10^{-5}/2)$，B$(2.0\times10^{-5},\ -8.0\times10^{-5}/2)$

これより，

$$\varepsilon_m = \frac{(4.5\times10^{-5}) + (2.0\times10^{-5})}{2} = 3.25\times10^{-5}$$

$$R' = \sqrt{\left(\frac{4.5\times10^{-5} - 2.0\times10^{-5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8.0\times10^{-5}}{2}\right)^2} = 4.19\times10^{-5}$$

また主軸方向は，

$$2\alpha' = \tan^{-1}\left(\frac{8.0\times10^{-5}}{4.5\times10^{-5} - 2.0\times10^{-5}}\right)$$

ここで例題 8－4 を参照して α' を決める．

$2\alpha' \fallingdotseq 72.64^\circ$　　$\therefore\quad \alpha' \fallingdotseq 36.32^\circ$

モールのひずみ円より，

最大主ひずみ $\varepsilon_1 = \varepsilon_m + R' = (3.25\times10^{-5}) + (4.19\times10^{-5}) = 7.44\times10^{-5}$

最大主ひずみ方向 $\theta_1 = \alpha' = 36.32^\circ$

最小主ひずみ $\varepsilon_2 = \varepsilon_m - R' = (3.25\times10^{-5}) - (4.19\times10^{-5}) = -0.94\times10^{-5}$

最小主ひずみ方向 $\theta_2 = \alpha' + 90^\circ = 126.32^\circ$

問題 4

式（8.47）から，

$$0.0001 = \frac{1-2\nu}{206\times10^9}(20\times10^6\times3)\qquad \therefore\quad \nu = 0.326$$

問題 5

式（8.48）より $\sigma_{\max} = \dfrac{32}{3.14(0.05)^3}\left[\dfrac{1}{2}\{(500) + \sqrt{(500)^2 + (400)^2}\}\right] = 46.48\,\mathrm{MPa}$

式（8.49）より $\tau_{\max} = \dfrac{16}{3.14(0.05)^3}\sqrt{(500)^2 + (400)^2} = 26.10\,\mathrm{MPa}$

応用問題

問題 6

球形タンクを水平に半分に輪切りにした場合の力のつり合いを考える．

半球に作用する力はつぎの 2 つの力である．

① 半球内面に作用する内圧力による力

その鉛直成分は切口の円の面積 S_0 として，

$$pS_0 = p\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

② 仮想の切口に作用する垂直応力 σ_θ による力

σ_θ・(断面積) $= \sigma_\theta \cdot \pi d \cdot t$

①②を等しく置いて，

$$p\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \sigma_\theta \cdot \pi d \cdot t = 0$$

$$\therefore \quad \sigma_\theta = \frac{pd}{4t} = \frac{900 \times 1}{4 \times 3 \times 10^{-3}} = 75.0 \times 10^3\,\mathrm{Pa} = 75\,\mathrm{kPa}$$

問題 7

ひずみゲージの設定より $\beta = 45°$ に対する式（8.68）を用いる．

$$\tan 2\theta = \frac{(5\times10^{-4}) + (4\times10^{-4}) - 2(3\times10^{-4})}{(5\times10^{-4}) - (4\times10^{-4})} = 3.0 \qquad \therefore \quad 2\theta = \tan^{-1}(3.0)$$

例題 8－4 を参考にして 2θ を決める．$2\theta_1 \fallingdotseq 71.56°$ $\quad\therefore\quad \theta_1 = 35.78°$

式（8.67）より $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 9 \times 10^{-4}$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3.16 \times 10^{-4}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_1 = 6.08 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = 2.92 \times 10^{-4}$$

ε_1，ε_2 が以上のように決まると，主応力は式（8.58）よりつぎのように求まる．

$\sigma_1 = 157.5\,\mathrm{MPa}$

$\sigma_2 = 107.3\,\mathrm{MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 25.1\,\mathrm{MPa}$$

応力の主軸方向は一様な等方性平板が平面応力状態のときはひずみの主軸方向と一致している．

$\varphi_1 = \theta_1 = 35.78°$，$\varphi_2 = \theta_1 + 90° = 125.78°$

$\varphi_3 = 35.78° \mp 45° = -9.22°$ または $80.78°$

問題 8

式（8.10）の右辺を 2 段階で計算する．（2×2）の行列と（2×2）の行列の積は（2×2）の行列になる．

第 1 段階：前の 2 行列の積

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_x\cos\varphi+\tau_{xy}\sin\varphi & \tau_{xy}\cos\varphi+\sigma_y\sin\varphi \\ -\sigma_x\sin\varphi+\tau_{xy}\cos\varphi & -\tau_{xy}\sin\varphi+\sigma_y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

第 2 段階：上の積に 3 番目の行列を右から乗じる．

$$\begin{bmatrix} \sigma_x\cos\varphi+\tau_{xy}\sin\varphi & \tau_{xy}\cos\varphi+\sigma_y\sin\varphi \\ -\sigma_x\sin\varphi+\tau_{xy}\cos\varphi & -\tau_{xy}\sin\varphi+\sigma_y\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

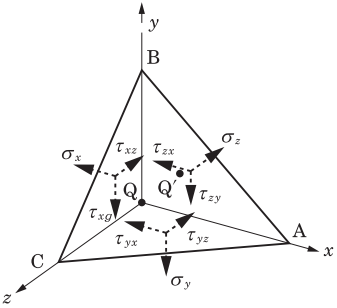
結果の 1 行 1 列目 $\sigma_{x'}=(\sigma_x\cos\varphi+\tau_{xy}\sin\varphi)(\cos\varphi)+(\tau_{xy}\cos\varphi+\sigma_y\sin\varphi)(\sin\varphi)$

$$=\sigma_x\cos^2\varphi+\sigma_y\sin^2\varphi+2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

同様に $\sigma_{y'}$，$\tau_{x'y'}$，$\tau_{y'x'}$ も求められる．$\tau_{y'x'}=\tau_{x'y'}$ も満たされ，式（8.10）より式（8.9）が確かに導かれることがわかる．

問題 9

物体内の一点 Q 点を原点として，互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸をとり，Q 点を頂点とし，各辺の向きが対応する軸と平行な微小な直方体から仮想平面で切り取られた微小な直角三角錐 QABC を考える．（右図）



仮想平面による x，y，z 軸の微小な切片 QA，QB，QC をそれぞれ a，b，c としよう．微小な直角三角錐の 4 つの境界面上で各応力成分は各々一定と考えてよく，各応力成分による力は各境界面の図心に作用するとしてよい．△QCB，△QAC，△QBA 上には点 Q での応力成分が作用するとしてよく，斜面△ABC の面積を S，面に作用する x，y，z 方向に働く力を，p_xS，p_yS，p_zS として条件をまとめると，

（方向）面	(x) △QCB	(y) △QAC	(z) △QBA	(n) △ABC
面積	$S_x=bc/2$	$S_y=ca/2$	$S_z=ab/2$	S
図心	$(0,\ b/3,\ c/3)$	$(a/3,\ 0,\ c/3)$	$(a/3,\ b/3,\ 0)$	$(a/3,\ b/3,\ c/3)$
x 方向の力	$-\sigma_xS_x$	$-\tau_{yx}S_y$	$-\tau_{zx}S_z$	p_xS
y 方向の力	$-\tau_{xy}S_x$	$-\sigma_yS_y$	$-\tau_{zy}S_z$	p_yS
z 方向の力	$-\tau_{xz}S_x$	$-\tau_{yz}S_y$	$-\sigma_zS_z$	p_zS

この直角三角錐がつり合い状態にあることから，そのモーメントの釣合いを考えてみ

よう．

△ABC の図心 Q′ を通り z 軸と平行な軸まわりのモーメント：

軸は△ABC および△QAB の図心も通るから，2 つの面からの寄与はない．また残る面上の垂直力の作用線は△ABC の図心を通るから垂直力の寄与もない．また物体力は表面力より高次の微小量で，省略できる．したがって，

$$M_z=(\tau_{xy}S_x)(a/3)-(\tau_{yx}S_y)(b/3)=(\tau_{xy}-\tau_{yx})(abc/6)=0$$

直角三角錐の体積は $(abc/6)\neq 0$ のため，

$$\tau_{xy}=\tau_{yz}$$

同様にして，△ABC の図心を通り y 軸，x 軸と平行な軸まわりの微小な直角三角錐のモーメントのつり合いを用いれば，残る共役性がそれぞれつぎのように導かれる．

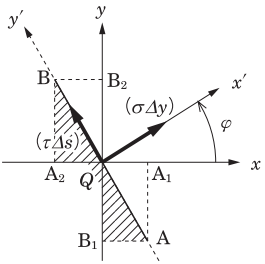
$$\tau_{xz}=\tau_{zx}\ \text{および}\ \tau_{yz}=\tau_{zx}$$

以上でせん断応力の共役性の証明ができた．

問題 10

簡単のため 2 次元で考える．

斜面上に点 Q を中点とする長さ Δs の線分 $\overline{AB}$ を考える．点 A，点 B から x 軸；y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ A_1，A_2；B_1，B_2 とする．



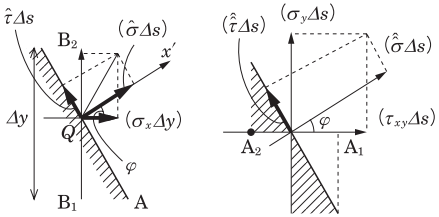
x 軸上の線分 $\overline{A_1A_2}$ の長さは

$$\Delta x=\Delta s\sin\varphi$$

y 軸上の線分 $\overline{B_1B_2}$ の長さは

$$\Delta y=\Delta s\cos\varphi$$

今，点 Q の応力状態が $(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})$ で与えられているとすると，x 軸に垂直な $\overline{B_1B_2}$ には x 方向に垂直力 $\sigma_x\Delta y$，y 方向に接線力 $\tau_{xy}\Delta y$ が働く．その力を $\overline{AB}$ 面上の垂直力と接線力に変換すると，



$$\hat{\sigma}\Delta s=(\sigma_x\Delta y)\cos\varphi+(\tau_{xy}\Delta y)\sin\varphi$$

$$\hat{\tau}\Delta s=-(\sigma_x\Delta y)\sin\varphi+(\tau_{xy}\Delta y)\cos\varphi$$

同様にして，y 軸に垂直な $\overline{A_1A_2}$ には x 方向に接線力 $\tau_{xy}\Delta x$，y 方向に垂直力 $\sigma_y\Delta x$ が働く．

その力を $\overline{AB}$ 面上の垂直力と接線力に変換すると，

$$\hat{\hat{\sigma}}\Delta s=(\tau_{xy}\Delta x)\cos\varphi+(\sigma_y\Delta x)\sin\varphi$$

$$\hat{\hat{\tau}}\Delta s=-(\tau_{xy}\Delta x)\sin\varphi+(\sigma_y\Delta x)\cos\varphi$$

各成分を足し合わせて，$\overline{\mathrm{AB}}$ 面上の垂直力 $\sigma\Delta s = \hat{\sigma}\Delta s + \hat{\hat{\sigma}}\Delta s$，接線力 $\tau\Delta s = \hat{\tau}\Delta s + \hat{\hat{\tau}}\Delta s$ が得られる．

$$\sigma\Delta s = (\sigma_x\Delta y)\cos\varphi + (\tau_{xy}\Delta y)\sin\varphi + (\tau_{xy}\Delta x)\cos\varphi + (\sigma_y\Delta x)\sin\varphi$$

$$\tau\Delta s = -(\sigma_x\Delta y)\sin\varphi + (\tau_{xy}\Delta y)\cos\varphi - (\tau_{xy}\Delta x)\sin\varphi + (\sigma_y\Delta x)\cos\varphi$$

長さの関係 $\Delta x = \Delta s\sin\varphi$，$\Delta y = \Delta s\cos\varphi$ を考慮して，両辺を Δs で割り整理すると式（8.8a），（8.8b）が直接求まる．

問題 11

直角三角形 CAH を C を中心に反時計回りに（2φ）だけ回転させた△CA′H′ を考える（図 8.8）．点 A の移動先 A′ の座標を（σ，τ）とするとき，σ と τ が式（8.11）となるかを直接に示そう．

$\overline{\mathrm{CH'}}$ は長さが $\dfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ で σ 軸と正方向（2φ）の角をなす．

$\overline{\mathrm{A'H'}}$ は長さが τ_{xy} で τ 軸の負方向（2φ）の角をなす．

したがって，式（8.11）の第 1，2 式が以下のように導かれる．

$$\sigma = \overline{\mathrm{OC}} + \overline{\mathrm{CH'}}\cos 2\varphi + \overline{\mathrm{A'H'}}\sin 2\varphi$$

$$\therefore\quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau = -\overline{\mathrm{CH'}}\sin 2\varphi + \overline{\mathrm{A'H'}}\cos\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

問題 12

第 1 主応力 σ_1 に対応する主軸方向 φ_1 は式（8.21）において σ に $\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + R$ を代入したつぎの式から決定すればよい．

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right)\cos\varphi_1 + \tau_{xy}\sin\varphi_1 = 0$$

$$\tau_{xy}\cos\varphi_1 + \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - R\right)\sin\varphi_1 = 0$$

ここで式（8.15）の関係から α を用いて書き直すと，各々つぎの形となる．

$$\cos(\varphi_1 - 2\alpha) - \cos\varphi_1 = 0$$

$$\sin(\varphi_1 - 2\alpha) + \sin\varphi_1 = 0$$

三角関数の和を積に直す公式を用いると，各々つぎの形となる．

$$2\sin(\varphi_1 - \alpha)\sin\alpha = 0$$

$$2\sin(\varphi_1 - \alpha)\cos\alpha = 0$$

2 つの条件が同時に成り立つには，

$\sin(\varphi_1-\alpha)=0$　すなわち　$\varphi_1=\alpha+n\pi$（$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$）

φ_1 を主値の範囲に限れば，$\varphi_1=\alpha$ として第 1 主軸方向が決定される．すなわち固有値の条件式（8.21）から導かれる第 1 主軸方向がモールの応力円から導かれる第 1 主軸方向と一致することが示された．第 2 主軸方向 φ_2 についても同様である．

問題 13

図 8.10 を参照して，

変形前の線素の長さ：$\overline{\mathrm{QP}}=(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$

変形後の線素の長さ：$\overline{\mathrm{Q'P'}}=(\Delta s^*)^2=(\Delta x^*)^2+(\Delta y^*)^2$

一方，

$$\Delta x^*=\overline{\mathrm{Q'H''}}+\overline{\mathrm{H''H'}}=\Delta x+\Delta s\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_x}{\partial y}\sin\theta\right)$$

$$\Delta y^*=\Delta y+\Delta s\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin\theta\right)$$

これより，

$$(\Delta s^*)^2=\left\{\Delta x+\Delta s\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_x}{\partial y}\sin\theta\right)\right\}^2+\left\{\Delta y+\Delta s\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin\theta\right)\right\}^2$$

$$=(\Delta s)^2+(\Delta s)^2\left[2\cos\theta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_x}{\partial y}\sin\theta\right)\right.$$

$$\left.+2\sin\theta\left\{\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin\theta\right\}\right]+(\Delta s)^2\left[(\cdots)^2+\{\cdots\}^2\right]$$

$$(\Delta s^*)=(\Delta s)\left[1+2\left[\cos\theta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_x}{\partial y}\sin\theta\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\theta\left\{\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin\theta\right\}\right]+(\Delta s)^2\left[(\cdots)^2+\{\cdots\}^2\right]\right]^{1/2}$$

右辺の［　］をテイラー展開して，u_x，u_y に関する導関数の 1 次項を残すと，

$$\Delta s^*\approx\Delta s\left[1+\frac{1}{2}2\left[\cos\theta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_x}{\partial y}\sin\theta\right)+\sin\theta\left\{\frac{\partial u_y}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin\theta\right\}\right]\right]$$

ここで $\dfrac{\Delta s^*-\Delta s}{\Delta s}=\varepsilon_\theta$ であるから，

$$\varepsilon_\theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}\cos^2\theta+\frac{\partial u_y}{\partial y}\sin^2\theta+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta$$

式（8.22）が導かれた．

$\overline{\mathrm{Q'P''}}\cdot\overline{\mathrm{Q'P'}}\sin(\Delta\phi)=(\Delta s)(\Delta s^*)\sin(\Delta\phi)=\Delta x\Delta y^*$

より式（8.23）が導かれる．

問題 14

図 8.11 より，変形前の微小直角三角形△QP$_1$P（または単に平行移動した△Q′P$_1$″P$_1$‴）が変形後△Q′P$_1$′P′ に移った．各辺の長さと見込み角はつぎのように与えられる．

$$\overline{\mathrm{Q'P'}} = (1+\varepsilon_\theta)\Delta s,\quad \overline{\mathrm{Q'P_1'}} = (1+\varepsilon_x)\Delta x,\quad \overline{\mathrm{P_1'P'}} = \overline{\mathrm{Q'P_2'}} = (1+\varepsilon_y)\Delta y$$

$$\angle \mathrm{Q'P_1'P'} = (\pi/2+\gamma_{xy})$$

この微小な△Q′P$_1$′P′ に余弦公式を適用すると，

$$\{(1+\varepsilon_\theta)\Delta s\}^2 = \{(1+\varepsilon_x)\Delta x\}^2 + \{(1+\varepsilon_y)\Delta y\}^2 - 2\{(1+\varepsilon_x)\Delta x\}\{(1+\varepsilon_y)\Delta y\}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right)$$

各々展開し，両辺を $(\Delta s)^2$ で割って $\Delta x/\Delta s = \cos\theta$，$\Delta y/\Delta s = \sin\theta$ を考慮すると，

$$\begin{aligned}1+2\varepsilon_\theta+\varepsilon_\theta^2 &= (1+2\varepsilon_x+\varepsilon_x^2)\cos^2\theta + (1+2\varepsilon_y+\varepsilon_y^2)\sin^2\theta \\ &\quad +2\{1+(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\varepsilon_x\varepsilon_y\}\sin\theta\cos\theta\sin\gamma_{xy} \\ &= 1+2\{\varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+2(\sin\gamma_{xy})\sin\theta\cos\theta\} \\ &\quad +(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy}\text{ の積を含む項})\end{aligned}$$

ε を微小としているので，ε の積の項はさらに微小となるため，ε と同じオーダーの微小項のみ残し，$\sin\gamma_{xy}\approx\gamma_{xy}$ を用いると，

$$\therefore\quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

式（8.29）の第 1 式が得られた．第 2 式も第 1 式の関係より明らかである．第 3 式は式（8.27）の関係を用いて導くとよい．

問題 15

簡単のため点 Q を原点にとった 2 つの直角座標系 Q−xy と Q−$x'y'$ を考える．Q−$x'y'$ は Q−xy を角 θ だけ回転させたものとする．

Q−xy に対応する変位 u_x，u_y，ひずみ ε_x，ε_y，γ_{xy} に対応させて，同じ点を Q−$x'y'$ から見た変位を $u_{x'}$，$u_{y'}$，ひずみを $\varepsilon_{x'}$，$\varepsilon_{y'}$，$\gamma_{x'y'}$ とするとき，それらは式（8.24），（825）と同様につぎの形に書ける．

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'},\quad \varepsilon_{y'} = \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'},\quad \gamma_{x'y'} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial x'}$$

これを ε_x，ε_y，γ_{xy} で表示しよう．

変位（$u_{x'}$，$u_{y'}$）と変位（u_x，u_y）との間にはつぎの関係が成り立つ．

$$u_{x'} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta,\quad u_{y'} = -u_x\sin\theta + u_y\cos\theta$$

一方，（x'，y'）と（x，y）との間にも位置ベクトルの座標変換の関係が成り立つ．

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,\quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$\varepsilon_{x'}$ に適用してみると，

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial u_{x'}}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x}(u_x \cos\theta + u_y \sin\theta)$$

$$+ \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}(u_x \cos\theta + u_y \sin\theta)$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x}\cos^2\theta + \frac{\partial u_y}{\partial y}\sin^2\theta + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta$$

式（8.24），（8.25）を考慮すると式（8.29）の第 1 式が次のように導かれる．

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

第 2 式の $\varepsilon_{x'}$，第 3 式の $\gamma_{x'y'}$ についても同様にして導くことができる．

第9章

基本問題

問題 1

真直棒が軸力を受けるときの［補］ひずみエネルギーを計算するため、任意の位置 x での断面積 $A(x)$ と軸方向の内力 N が必要である．

① 断面積 $A(x)$：

上面から下向きに x 軸をとると，任意の位置 x における断面の直径は，

$$d=\frac{h-x}{h}d_1+\frac{x}{h}d_2=\frac{d_2-d_1}{h}x+d_1\quad(0\leq x\leq h)$$

対応する断面積は $A(x)=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{d_2-d_1}{h}x+d_1\right\}^2$

軸力 $N=P$ は一定である．このとき［補］ひずみエネルギーは式（9.19）で計算できる．数学公式集 1 を参照のこと．

$$U=U^*=\int_0^h\frac{(-P)^2}{2E\frac{\pi}{4}\left\{\frac{d_2-d_1}{h}x+d_1\right\}^2}dx=\frac{2hP^2}{\pi E(d_2-d_1)}\left\{-\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_1}\right\}=\frac{2P^2h}{\pi Ed_1d_2}$$

問題 2

2 次元の場合のミーゼスの等価応力の式（9.31）を用いる．

$$\sigma_{eq}=\{(80)^2+(-40)(80)+(-40)^2+3(25)^2\}^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 81.70\,\mathrm{MPa}$$

問題 3

重さ W の物体がはりの上方 h の高さから落下し，はりの中央点に衝突して最大たわみ δ が生じ，その位置に作用している力を P としよう．物体がなした仕事は $W(h+\delta)$，はりに蓄えられるひずみエネルギーは $\frac{1}{2}P\delta$ である．よってエネルギーが保存されるとすると，

$$\frac{1}{2}P\delta=W(h+\delta)$$

一方，はりの中央点に作用する集中力 P による中央点のたわみ δ は，例題 6－6 より

$$\delta=\frac{Pl^3}{48EI}$$

この P を上のエネルギーの式に代入すると，

$$\frac{1}{2}\frac{48EI}{l^3}\delta^2 = w(h+\delta)$$

はりの中央点に重さ W がじわりと静的に加わったときの静的たわみを δ_{st} とすると，

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI}$$

これを用いてエネルギーの式を整理すると，

$$\delta^2 - 2\delta_{st}\delta - 2h\delta_{st} = 0$$

これより

$$(\delta - \delta_{st})^2 = {\delta_{st}}^2 + 2h\delta_{st}$$

物理的に意味があるのは正の根であるから，それを採用すると， 最大たわみは

$$\delta = \delta_{st}(1 + \sqrt{1 + 2h/\delta_{st}})$$

応力はたわみに比例するから，最大応力は，

$$\sigma = \sigma_{st}(1 + \sqrt{1 + h/\delta_{st}})$$

ただし，σ_{st} ははりの中央点に w が静的に作用したときの中央断面に作用する曲げ応力の最大値．

問題 4

図 9.7 のような片持ちはりの左端の自由端 A に下向きに集中荷重 P_1 が作用しているとき $x = a = l - b$ とおくと，点 C での傾き（たわみ角）とたわみがつぎのように求まる．

傾き（たわみ角）$\vartheta_2^{(1)} = -P_1 b(2l-b)/(2EI)$，たわみ $v_2^{(1)} = P_1 b^3(3l-b)/(6EI)$

逆に途中の点 C に下向きに集中荷重 P_2 が作用し，左端の自由端 A に荷重が作用していない場合には片持ちはりの公式から点 A での傾き（たわみ角）とたわみを求めると，

傾き（たわみ角）$\vartheta_1^{(2)} = -P_2 b^2/(2EI)$，たわみ $v_1^{(2)} = P_2 b^2(3l-b)/(6EI)$

これより，この例ではつぎの相反関係の式（9.41）が確かに成り立っている．

$$\frac{v_2^{(1)}}{P_1} = \frac{b^3(3l-b)}{6EI} = \frac{v_1^{(2)}}{P_2} \qquad \therefore \quad P_1 v_1^{(2)} = P_2 v_2^{(1)}$$

問題 5

図 9.7 のような片持ちはりの端でない点 C（a，0）に時計回りの集中モーメント M_2 が作用し，左端の自由端 A に荷重が作用していない場合，点 A での傾き（たわみ角）とたわみは，$x = 0$ として，

$$\text{傾き（たわみ角）} = -\frac{M_2}{EI}b, \quad \text{たわみ } v_1^{(2)} = -\left\{\frac{M_2}{2EI}b^2 + \frac{M_2}{EI}b(l-b)\right\}$$

$$= -\frac{M_2 b}{2EI}(2l-b)$$

一方，左端の自由端 A に下向きに集中荷重 P_1 が作用し，点 C には荷重が作用していない場合の点 C での－傾き（たわみ角）とたわみは，

$$\text{傾き（たわみ角）}\ \vartheta_2^{(1)} = -\frac{P_1 b(2l-b)}{2EI},\quad \text{たわみ}\ v_2^{(1)} = \frac{P_1 b^3(3l-b)}{6EI}$$

これから，

$$\frac{v_1^{(2)}}{M_2} = -\frac{b(2l-b)}{2EI} = \frac{\vartheta_2^{(1)}}{P_1} \qquad \therefore\quad P_1 v_1^{(2)} = M_2 \vartheta_2^{(1)}$$

相反定理が確かに成立している．

問題 6

点 C に外から作用する集中ねじりモーメント T_C により，左右端 A，B に生じるねじり（抵抗）モーメントをそれぞれ T_A，T_B とする．

ねじりモーメントのつり合いにより，

$$-T_A - T_B + T_C = 0$$

T_C はわかっているとしているが，T_A，T_B は未知量．2 つの未知量につり合い式が 1 つとなるから不静定問題である．棒のねじりによる［補］ひずみエネルギーの式 (9.22) を用いて解くため，

（Ⅰ）棒内に生じるねじり（抵抗）モーメントをまず求める．

点 C に外からねじりモーメント T_C が加わり，ねじりモーメントが変化しているから場合分けが要る．AC 部と CB 部のねじり（抵抗）モーメントを各々 T_1，T_2 とする．

① AC 部（$0 \le x \le a$）

$$T_A + T_1 = 0$$

$$\therefore\quad T_1 = T_A$$

② CB 部（$a \le x \le l$）

$$T_2 = T_A - T_C$$

$$= -T_B$$

（Ⅱ）棒全体のねじりによる［補］ひずみエネルギーは 2 つの部分の［補］ひずみエネルギーの和で与えられる．

$$U = U^* = \int_0^a \frac{{T_1}^2}{2GI_P}dx + \int_a^l \frac{{T_2}^2}{2GI_P}dx$$

ここで不静定量を $X = T_A$ にとると，$T_1 = X$，$T_2 = X - T_C$ となるから，

$$= \int_0^a \frac{X^2}{2GI_P}dx + \int_a^l \frac{(X-T_C)^2}{2GI_P}dx$$

（Ⅲ）カスティリアノの定理の式（9.47）を適用．

$$\varphi_A = \frac{\partial U}{\partial X} = \int_0^a \frac{X}{GI_P}dx + \int_a^l \frac{(X-T_C)}{GI_P}dx = \frac{X}{GI_P}a + \frac{(T_C-X)}{GI_P}(l-a) = 0$$

この $\varphi_A = 0$ を X についての 1 次方程式として解くと，

$$T_A = X = \frac{l-a}{l} T_C = \frac{b}{l} T_C,$$

$$T_B = T_C - T_A = \frac{a}{l} T_C$$

両端での反ねじりモーメント T_A，T_B が決まったから，問題は静定問題になり，以後は順次，ねじり（抵抗）モーメント T_1，T_2 や比ねじり角，ねじり角，せん断応力を求めていけばよい．

問題 7

この問題ではL字型に曲がったはりの先端に集中荷重 P が作用しているため壁に垂直なはりの一部に曲げとねじりが加わり，曲がった残りの部分に曲げが作用している問題となっている．曲げモーメントとねじりモーメントという2種類の荷重が作用しており，エネルギーの式（9.23）を適用するとよい．

（Ⅰ）曲げモーメントとねじりモーメントを求める．

① はり（長さ a）は，先端に作用する下向き荷重 P とねじりモーメント $T=Pb$（一定）を受けている．荷重 P により真直はり内部に生じる曲げモーメントは，

$$M_1 = -Px_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

② はり（長さ b）は先端に作用する下向き荷重 P による曲げを受ける．

$$M_2 = -Px_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$$

（Ⅱ）はり全体の［補］ひずみエネルギーは2つの部分のエネルギーの和である．

$$U = \int_0^a \frac{(-Px_1)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^a \frac{(Pb)^2}{2GI_P} dx_1 + \int_0^b \frac{(-Px_2)^2}{2EI} dx_2 = \frac{P^2a^3}{2EI} + \frac{P^2b^2a}{2GI_P} + \frac{P^2b^3}{6EI}$$

（Ⅲ）カスティリアノの定理を適用する．

荷重 P が作用する自由端での荷重方向のたわみは，

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{(a^3+b^3)\ P}{3EI} + \frac{ab^2P}{GI_P}$$

はりは円断面であるから，

$$I = \frac{\pi}{64} d^4, \quad I_P = \frac{\pi}{32} d^4$$

これを代入して，

$$v = \frac{32P}{\pi d^4} \left\{ \frac{2(a^3+b^3)}{3E} + \frac{ab^2}{G} \right\}$$

応用問題

問題 8

たわみを求めたい点 C に下向きの仮想の集中荷重 P も追加した問題として扱うことになる．このようにしてカスティリアノの定理を使って結果を出した後，$P \to 0$ とするテクニックも学ぼう．

（Ⅰ）はりに生じる曲げモーメントを求める．

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ で } \quad M_1 = -\frac{w}{2}x^2$$

$$\frac{l}{2} \leq x \leq l \text{ で } \quad M_2 = -\frac{wl}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

（Ⅱ）はり全体の［補］ひずみエネルギーの式を立てる．

$$U = \int_0^{l/2} \frac{\{-wx^2/2\}^2}{2EI}dx + \int_{l/2}^{l} \frac{\left\{-wl\left(x - \frac{l}{4}\right)/2 - P\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}^2}{2EI}dx$$

（Ⅲ）カスティリアノの定理の式（9.47）を適用する．

仮想集中荷重 P による荷重点 C での荷重 P 方向の変位（たわみ）は，

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P}\Big)_{P\to 0} = 0 + \frac{\partial}{\partial P}\left\{\int_{l/2}^{l} \frac{\left\{-wl\left(x - \frac{l}{4}\right)/2 - P\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}^2}{2EI}dx\right\}_{P\to 0}$$

積分と偏微分の順序を入れ替えて，積分の中で先に P について偏微分すると，

$$= \left[\int_{l/2}^{l} \frac{\left\{-wl\left(x - \frac{l}{4}\right)/2 - P\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}}{EI}\left\{-\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}dx\right]_{P\to 0}$$

ここで $P \to 0$ とすると積分が簡単になる．

$$= \int_{l/2}^{l} \left[\frac{\left\{-wl\left(x - \frac{l}{4}\right)/2 - P\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}}{EI}\right]_{P\to 0} \left\{-\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}dx$$

$$= \int_{l/2}^{l} \frac{\left\{-wl\left(x - \frac{l}{4}\right)/2\right\}}{EI}\left\{-\left(x - \frac{l}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{7wl}{24EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{7wl^4}{192EI}$$

問題 9

両端固定はりの中央に集中力が作用しているという不静定問題の典型である．

(0) 両端での反力，反モーメントの間のつり合い

固定端である左端 A での反力を R_A，反モーメントを M_A

固定端である右端 B での反力を R_B，反モーメントを M_B とする．

はり全体のつり合いの式はつぎのようになる．

・力のつり合い（上向き正）：$R_A+R_B-P=0$

・モーメントのつり合い（反時計回り正，右端まわり）：$-R_Al+M_A+Pb-M_B=0$

(Ⅰ) はりに生じる曲げモーメントを求める．

$0\leq x\leq a$ で　$M_1=R_Ax-M_A$

$a\leq x\leq l$ で　$M_2=R_Ax-M_A-P(x-a)$

(Ⅱ) はり全体の［補］ひずみエネルギーの式を立てる．

2 つの区間でのエネルギーの和で求められる．

$$U=\int_0^a\frac{(R_Ax-M_A)^2}{2EI}dx+\int_a^l\frac{\{R_Ax-M_A-P(x-a)\}^2}{2EI}dx$$

(Ⅲ) カスティリアノの定理の式（9.47）を適用する．

R_A と M_A が作用する固定端である左端 A では，たわみと傾きが 0 であるからカスティリアノの定理より，

$$0=v_A=\frac{\partial U}{\partial R_A}=\int_0^a\frac{(R_Ax-M_A)}{EI}(x)\,dx+\int_a^l\frac{\{R_Ax-M_A-P(x-a)\}}{EI}(x)\,dx$$

$$=\frac{R_Al^3}{3EI}-\frac{M_Al^2}{2EI}-\frac{P(l-a)^2(2l+a)}{6EI}$$

$$0=\theta_A=\frac{\partial U}{\partial M_A}=\int_0^a\frac{(R_Ax-M_A)}{EI}(-1)\,dx+\int_a^l\frac{\{R_Ax-M_A-P(x-a)\}}{EI}(-1)\,dx$$

$$=-\frac{R_Al^2}{2EI}+\frac{M_Al}{EI}+\frac{P(l-a)^2}{2EI}$$

この 2 つの条件式から未知量 R_A，M_A を求めると，

$$R_A=\frac{P(l-a)^2(l+2a)}{l^3}=\frac{Pb^2(3a+b)}{l^3},\quad M_A=\frac{P(l-a)^2a}{l^2}=\frac{Pb^2a}{l^2}$$

R_A と M_A が決まると，はり全体のつり合い式に代入して，残る R_B，M_B が決まる．

$$R_B=\frac{Pa^2(3b+a)}{l^2},\quad M_B=\frac{Pa^2b}{l^2}$$

R_A と M_A が決まると，せん断力線図 SFD や曲げモーメント線図 BMD も描くことができる．

問題 10

中間点 B の支持力を R_B，曲げモーメントを M_B とすると，半分ずつがかかってくると考えてよいから，

$$R_B = \frac{wa}{2} + \frac{wb}{2}$$

単純支持の左端 A には反力 R_A が生じるが，点 B 回りのモーメントのつりあいより，

$$-R_A a + (wa)\frac{a}{2} + M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{wa}{2} + \frac{Mb}{a}$$

（Ⅰ）AB の部分に生じる曲げモーメント M_1 は，A 点から x をとると，そこで仮想切断した左の部分全体のモーメントのつり合いから，

$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} = \left(\frac{wa}{2} + \frac{M_B}{a}\right)x - \frac{wx^2}{2}$$

BC の部分に生じる曲げモーメント M_2 は，右端 C 点から x' をとると，

$$M_2 = R_C(x') - \frac{w(x')^2}{2}, \quad R_C = \frac{wb}{2} + \frac{M_B}{b}$$

（Ⅱ）ひずみエネルギー

全体の曲げによるひずみエネルギーは 2 つの区間のエネルギーの和であるから，

$$U = \int_0^a \frac{\left(R_A x - \frac{w}{2}x^2\right)^2}{2EI}dx + \int_0^b \frac{\left\{R_C(x') - \frac{w}{2}(x')^2\right\}^2}{2EI}dx'$$

（Ⅲ）カスティリアノの定理の適用

$$0 = \frac{\partial U}{\partial M_B} = \int_0^a \frac{\left(R_A x - \frac{w}{2}x^2\right)}{EI}\left(\frac{1}{a}\right)dx + \int_0^b \frac{\left\{R_C(x') - \frac{w}{2}(x')^2\right\}}{EI}\left(\frac{1}{b}\right)dx$$

これを解いて，

$$M_B = -\frac{w}{8}(a^2 - ab + b^2)$$

問題 11

式（9.17）の右辺の第 1 項にフックの法則の式（8.41）を代入すると，

$$\int \varepsilon_x d\sigma_x = \int \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}d\sigma_x = \frac{1}{E}\int \{\sigma_x d\sigma_x - \nu\sigma_y d\sigma_x - \nu\sigma_z d\sigma_x\}$$

同様にして以下の式 $\int \varepsilon_y d\sigma_y$，$\int \varepsilon_z d\sigma_z$ を求めて，加え合わせると，

$$\int \varepsilon_x d\sigma_x + \int \varepsilon_y d\sigma_y + \int \varepsilon_z d\sigma_z$$

$$= \frac{1}{E}\int d\left\{\frac{1}{2}\sigma_x{}^2 + \frac{1}{2}\sigma_y{}^2 + \frac{1}{2}\sigma_z{}^2 - \nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{2E}(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)$$

式（9.17）の右辺の第 4 項以降にフックの法則の式（8.41）を代入すると，

$$\int \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \int \gamma_{yz} d\tau_{yz} + \int \gamma_{zx} d\tau_{zx} = \int \frac{\tau_{xy}}{G} d\tau_{xy} + \int \frac{\tau_{yz}}{G} d\tau_{yz} + \int \frac{\tau_{zx}}{G} d\tau_{zx}$$

$$= \frac{1}{G}\int d\left\{\frac{1}{2}\tau_{xy}{}^2 + \frac{1}{2}\tau_{yz}{}^2 + \frac{1}{2}\tau_{zx}{}^2\right\} = \frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)$$

したがって，式（9.17）はつぎの形に書ける．

$$u^* = \frac{1}{2E}(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)$$

すなわち，式（9.24）が導かれた．

さらに右辺の第 2 項をうまく振り分けると，

$$u^* = \frac{1}{2}\sigma_x \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \frac{1}{2}\sigma_y \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)}{E} + \frac{1}{2}\sigma_z \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

$$+ \frac{1}{2}\tau_{xy}\frac{\tau_{xy}}{G} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\frac{\tau_{yz}}{G} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\frac{\tau_{zx}}{G}$$

再び線形弾性体に対するフックの法則の式（8.41）を用いると，

$$u^* = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$

式（9.6）が導かれた．

問題 12

式（9.25）：$u^* = \dfrac{1}{2E}\{(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\}$

式（9.26）：$u_\nu^* = \dfrac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

u^* を変形して（$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$）で整理すると，

$$u^* = \frac{1}{2E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

式（9.26）を用いて u_ν^* の項を足し引きすると，

$$= \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + \left\{\frac{1}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E}\right\}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$- \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$= \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + \frac{1+\nu}{3E}\{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\}$$

$$= \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + \frac{1+\nu}{3E}\{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1\}$$

$$= \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + \frac{1+\nu}{6E}\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}$$

したがって，

$$u_d^* = u^* - u_v^* = u^* - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$= \frac{1+\nu}{6E}\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}$$

式（9.27a）が導かれた．

式（9.27b）を式（9.24）から導く．

式（9.24）において，x，y，z 軸を主軸 1，2，3 に一致させた場合，$\sigma_x=\sigma_1$，$\sigma_y=\sigma_2$，$\sigma_z=\sigma_3$，$\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ となって式（9.25）が導かれる．式（9.24）と式（9.25）は同等であることがわかる．

式（9.24）：$$\underline{u^* = \frac{1}{2E}(\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)}$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)$$

式（9.26）：$$\underline{u_v^* = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2}$$

σ_x，σ_y，σ_z に関する下線部は，式（9.25），式（9.26）の σ_1，σ_2，σ_3 に関する部分と同じ形をしているので，全く同じ形に変形できる．

$$u^* = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2 + \frac{1+\nu}{6E}\{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\}$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)$$

これより，

$$u_d^* = u^* - u_v^* = u^* - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2$$

$$= \frac{1+\nu}{6E}\{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\} + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)$$

等方性弾性体では，

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{または} \quad \frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G}$$

の関係があるから，式（9.27b）が導かれる．

第10章

基本問題

問題 1

解説

両端単純支持で長さ $l=1\,000\,\mathrm{mm}$ の棒の座屈荷重は $P_E=\pi^2EI/l^2$ であるから，断面二次モーメント $I=25^4/12=32\,552.1\,\mathrm{mm}^4$ を代入すると $P_E=64\,190.1\,\mathrm{N}$ となり，面積 $25\times25\,\mathrm{mm}^2$ で割ると座屈応力 $\sigma_E=102.7\,\mathrm{MPa}$ が求められる．降伏応力より十分小さく，ジョンソンの公式を参照しても降伏応力の 1/2 以下であり，弾性範囲の座屈である．オイラーの公式をそのまま適用でき，$\sigma_E=102.7\,\mathrm{MPa}$ となる．

問題 2

長さ $l=500\,\mathrm{mm}$ の棒では $P_E=\pi^2EI/l^2$ に代入すると座屈応力は問題 10－1 の 4 倍の座屈応力 $\sigma_E=410.8\,\mathrm{MPa}$ となり，降伏応力の 1/2 の 125 MPa を超えているので実験の値を良く近似するといわれているジョンソンの公式を用いるとオイラーの公式をそのまま適用できない．ジョンソンの公式によると，座屈応力 σ_{cr} は，

$$\sigma_{cr}=\sigma_Y\left(1-\frac{\sigma_Y}{4\sigma_E}\right)=250\times\left(1-\frac{250}{4\times410.8}\right)=212.0\,\mathrm{MPa}$$

と求められる．

問題 3

座屈変形は断面二次モーメントの小さい方向に生じる．断面二次モーメントの小さい方にたわむとき，断面二次モーメント I は $I=100\times(50)^3/12=1\,041\,666.7\,\mathrm{mm}^4$ を用いる．断面積 $\mathrm{A}=100\times50=5\,000\,\mathrm{mm}^2$ であるから両端固定の座屈応力は，

$$\begin{aligned}\sigma_E&=4\pi^2EI/Al^2\\&=4\times(3.14)^2\times200\,000\,\mathrm{N/mm}^2\times1\,041\,666.7\,\mathrm{mm}^4/5\,000\,\mathrm{mm}^2/2\,400^2\,\mathrm{mm}^2\\&=285.3\,\mathrm{MPa}\end{aligned}$$

と求まる．温度変化によってこの応力が生じるまで温度変化が許される．熱応力 αET の式から温度変化 T はつぎの値となる．

$$T=285.3\,\mathrm{MPa}/10^{-5}\,1/\mathrm{K}/200\,000\,\mathrm{MPa}=142.6\,\mathrm{K}$$

応用問題

問題 4

連接棒の y 軸まわりの断面二次モーメント I_y，z 軸まわりの断面二次モーメント I_z を

求める．I_y に関しては矩形断面の公式を用いて，

$$I_y=(6+6)\times 45^3/12\,\mathrm{mm}^4+38\times 5^3/12\,\mathrm{mm}^4=91\,521\,\mathrm{mm}^4$$

と求まる．I_z に関しては平行軸の定理を用いて，

$$I_z=5\times 38^3/12\,\mathrm{mm}^4+2\times 45\times 6^3/12\,\mathrm{mm}^4+2\times 45\times 6\times 22^2\,\mathrm{mm}^4$$
$$=285\,843.3\,\mathrm{mm}^4$$

となる．境界条件は y 軸に関しては固定であるから単純支持の座屈荷重の 4 倍になるので I_y を 4 倍すると，単純支持の場合の I_z よりも大きくなる．結局連接棒は I_z まわりに座屈することになる．座屈荷重は，

$$P_E=\pi^2EI_z/l^2=3.14^2\times 200\,000\,\mathrm{N/mm}^2\times 285\,843.3\,\mathrm{mm}^4/400^2\mathrm{mm}^2=3\,522.8\,\mathrm{kN}$$

となる．

問題 5

部材 12 に作用する圧縮の軸力はトラスの節点 7 でトラス全体のモーメントのつり合いを考えることにより求められる．節点 1 では反力は部材 12 の軸方向に作用し，部材 12 には圧縮の軸力 T_{12} が作用する．節点 7 でトラス全体のモーメントのつり合いを考えると，

$$T_{12}\,\mathrm{N}\times 800\,\mathrm{mm}=2\,500\,\mathrm{mm}\times 10\,000\,\mathrm{N}\ \text{から}\ T_{12}=31.25\,\mathrm{kN}$$

となり，長さ $l=500\,\mathrm{mm}$ であるから一様な断面であるとし，$\pi^2EI/l^2=31.25\,\mathrm{kN}$ から最小限必要な I は $3\,961.9\,\mathrm{mm}^4$ となる．

問題 6

はりに加わる荷重 P により，中央の棒には P_1 が加わり，残りの 2 本にそれぞれ P_2 加わるとする．また，はりの長さは a，断面二次モーメントを I' である．はりには中央に荷重 $(P-P_1)$ が加わり，両端で棒からそれぞれ $P_2=(P-P_1)/2$ の反力で支持された両端支持のはりと考えると，はりの公式より中央と端部の支持点のはりのたわみの差は $(P-P_1)a^3/48EI'$ であり，この変形の差は棒の圧縮量の差になるため $P_1l/AE-(P-P_1)l/2AE=(P-P_1)a^3/48EI'$ となる．これから中央の棒に加わる力 P_1 が，

$$P_1=P\left(\frac{a^3}{48EI'}+\frac{l}{2AE}\right)\Big/\left(\frac{3l}{2AE}+\frac{a^3}{48EI'}\right)$$

と求められる．両端の棒に加わる荷重は $P_2=(P-P_1)/2$ となる．中央の棒が座屈しないためには $P_1<\pi^2EI/l^2$ であればよい．ここで I は棒の断面二次モーメントである．

第11章

基本問題

問題 1

$D=42\,\mathrm{mm}$，$D/d=1.05$ であるから $d=40\,\mathrm{mm}$ である．図 11.6 で $r/d=5/40=0.125$ であるから，応力集中係数 α はねじりの場合 1.35 である．

また，ねじりの公称せん断応力を d を用いて公式から計算する．せん断応力 $\tau=16T/(\pi d^3)$ であるから $\tau=16\times0.5\times10^6\,\mathrm{Nmm}/3.14/40^3\,\mathrm{mm}^3=39.8\,\mathrm{N/mm}^2=39.8\,\mathrm{MPa}$ となる．

応力集中係数 α を掛けて最大応力は $1.35\times39.8\,\mathrm{MPa}=53.7\mathrm{MPa}$ となる．

問題 2

はりの中央に生じる曲げモーメント M は荷重 P とすると $M=P\,\mathrm{N}\times1\,000\,\mathrm{mm}/4=250P\,\mathrm{Nmm}$ となる．断面の高さ $H=60\,\mathrm{mm}$，幅 $B=30\,\mathrm{mm}$ とすると，断面係数は $Z=30\,\mathrm{mm}\times60^2\,\mathrm{mm}^2/6=18\,000\,\mathrm{mm}^3$ であるから，はりの上下面が降伏応力 300 MPa となる（解答の図 1 の（b）の状態）荷重 P は，

$$P=300\,\mathrm{MPa}\times18\,000\,\mathrm{mm}^3/250\,\mathrm{mm}=21.6\,\mathrm{kN}$$

となる．さらに荷重を増加させると解答の図 1 の（c）の状態を経て図 1 の（d）の状態になり，上半分が圧縮の降伏応力 σ_Y，下半分が引張りの降伏応力 σ_Y になる．上半分と下半分の断面積はそれぞれ $BH/2$ であり，この状態で断面に生じるモーメント M_Y は $M_Y=(H/2)\times\sigma_YBH/2$ であるから，このときの荷重 P は，

$$P=(H/2)\times\sigma_YBH/2/250=32.4\,\mathrm{kN}$$

となり，上下面が降伏し始める荷重の 1.5 倍である．

問題 3

溝なしの直径 d の丸棒の疲労限度が 200 MPa であるとする．溝つき丸棒は図 11.8 で $r/d=5/40=0.125$ であるとし，応力集中係数 α を求めると引張りのとき 1.6 である．切り欠き係数 β を 1.6 と仮定すると $200\,\mathrm{MPa}/1.6=125\,\mathrm{MPa}$ となる．実際には応力集中係数 α は部品の形状によって決まるが，切り欠き係数 β は材質などにも依存するので注意する必要がある．

問題 4

図 11.8 から疲労限度の応力は 140 MPa である．はりに生じる最大曲げ応力をこの値以下にする．曲げーモーメントは $M=P\,\mathrm{N}\times1\,000\,\mathrm{mm}/4=250P\,\mathrm{Nmm}$ である．断面係数 $Z=20\times(30)^2/6=3\,000\,\mathrm{mm}^3$ であるから，はりに生じる曲げ応力を 140 MPa 以下に

するには許容される荷重 P は，

$$P = 140\,\mathrm{MPa} \times 3\,000\,\mathrm{mm}^3/250\,\mathrm{mm} = 1\,680\,\mathrm{N}$$

となる．

応用問題

問題 5

直径 d の丸棒に，曲げモーメント M，ねじりモーメント T が作用しているとする．このとき曲げ応力 $\sigma = M/Z$，せん断応力 $\tau = T/2Z$ で与えられる．ここで Z は曲げの断面係数であり，$Z = \pi d^3/32$ である．このとき主応力は，

$$\sigma_1,\ \sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

である．最大せん断応力説ではせん断応力 $\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ がせん断の降伏応力になるときに弾性破損が生じる．せん断の降伏応力は一軸の引張りで 45° 方向のせん断応力が $\sigma_Y/2$ のときであるから，

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2}\sigma_Y$$

となり，

$$(\sigma/\sigma_Y)^2 + 4(\tau/\sigma_Y)^2 = 1$$

の関係が成立する．

σ_Y せん断ひずみエネルギー説ではミーゼスの等価応力式（11.2）が降伏応力になるときであり，

$$(\sigma/\sigma_Y)^2 + 3(\tau/\sigma_Y)^2 = 1$$

となる．これらの関係を図示すると解答に示す図 2 のようになり，せん断応力のみ作用している $\sigma = 0$ のときに両者の差がもっとも大きくなる．

問題 6

疲労強度は解答にその一部を示したように非常に多くの因子によって影響を受ける．実際に機械部品を設計するにあたっては機械の使用環境，実働荷重，応力分布，材料，加工法，加工精度などをよく検討した上で疲労強度を評価する．疲労破壊に関しては非常に多くの文献が出版されているので，これらをよく調査すること，また実際に実験を行ってデータを蓄積することも重要である．