電気電子数学入門　微分方程式・ラプラス変換・フーリエ解析
演習問題解答
問題１－１
１.
(1) $\frac{\pi}{12}$　　(2) $\frac{25}{36}\pi$　　(3) $\frac{7}{12}\pi$　　(4) $\frac{3}{4}\pi$
(5) 22.5°　(6) 36°　　(7) 105°　　(8) 240°

2. $\sin\theta$ と$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$のグラフ。

別紙に pdf にて添付。

３.

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta=\pm\sqrt{1-(\cos\theta)^2}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\pm 1$$

4.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\,1}=1-\sqrt{3}$$

5.

$$\sin(2\alpha)\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\{\sin(2\alpha+\alpha)+\sin(2\alpha-\alpha)\}=\frac{1}{2}\{\sin(3\alpha)+\sin(\alpha)\}$$

$$\cos(3\alpha)\sin(2\alpha)=\frac{1}{2}\{\sin(3\alpha+2\alpha)-\sin(3\alpha-2\alpha)\}=\frac{1}{2}\{\sin(5\alpha)-\sin(\alpha)\}$$

6.

$$\sin(3\alpha)+\sin(\alpha)=2\sin\left(\frac{3\alpha+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-\alpha}{2}\right)=2\sin(2\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(3\alpha)-\cos(2\alpha)=-2\sin\left(\frac{3\alpha+2\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{3\alpha-2\alpha}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{5}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

7.

$\frac{5}{6}\pi = \frac{3}{6}\pi + \frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ と分解できるから、加法定理の和と積の関係より

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

問１－２

１.

式(1.57)より

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(1) $f(x) = x^2$ だから、

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{(x+\Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} (2x + \Delta x)$$

$$= 2x$$

(2) $f(x) = (x+1)^2$ だから

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{(x+1+\Delta x)^2 - (x+1)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{x^2 + 2x + 1 + 2\Delta x(x+1) + \Delta x^2 - (x^2 + 2x + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{2\,\Delta x(x+1) + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} 2\{(\mathrm{x} + 1) + \Delta\mathrm{x}\}$$

$$= 2(x+1)$$

⑶ $sin(3x)$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\sin\{3(x+\Delta x)\} - \sin(3x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{\sin(3x)\cos(3\Delta x) + \sin(3\Delta x)\cos(3x) - \sin(3x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{2\cos\left(\frac{3x+3\Delta x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{2\cos\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3}{2}\Delta x}\frac{3}{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{3\cos\left(3x+\frac{3}{2}\Delta x\right)\sin\left(\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3}{2}\Delta x}$$

$$= 3\cos(3x)$$

問１－２

２．⑴ $\mathrm{y} = x^2 + 1$　とすると　　　$\mathrm{y}' = 2x$

⑵ $\mathrm{y} = x^3 + 3x^2 + 4$　とすると　　　$\mathrm{y}' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

⑶ $\mathrm{y} = (x+2)(x-3)$　とすると　　　$\mathrm{y}' = (x-3) + (x+2) = 2\mathrm{x} - 1$

(4) $\mathrm{y} = 3x^{-3}$　とすると　　　$\mathrm{y} = -9x^{-4}$

⑸ $\mathrm{y} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$　とすると　　　$\mathrm{y} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

⑹ $\mathrm{y} = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$　とすると　　　$\mathrm{y}' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

⑺ $\mathrm{y} = e^{3x}$　とすると　　　$\mathrm{y}' = 3e^{3x}$

⑻ $\mathrm{y} = \log 3x$ とする、さらに$\mathrm{z} = 3\mathrm{x}$　とおいて合成関数の微分を使う、

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dz}}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3x}3 = \frac{1}{x}$$

(9) $y = e^x \log_e x$ とおくと、積の微分より

$y' = e^x \log_e x + e^x \frac{1}{x}$

(10) $y = \frac{x-2}{x+1}$ とおくと商の微分より、

$y' = \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

(11) $y = \frac{1}{\cos x}$ とおくと

$y' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\tan x}{\cos x}$

(12) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ とおくと

$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(13) $y = \sqrt{x^3 - 1}$ とおくと、$y = (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$ とおけるから

$y' = \frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} 3x^2 = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

(14) $y = \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$ とおくと$y = (4x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(4x^2 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}}(8x - 2) = \frac{4x-2}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$

3.

(1) $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$　逆関数の微分??????

$y^3 = x$, $x = y^3$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}(\quad) = \frac{dy}{dx}(y^{-3}) = -3y^{-4} = \frac{-3}{y^4} = -2(\quad)$$

(2) $y = cos^{-1}x$

$x = cos\, y$　　$\frac{dx}{dy} = -\ sin\, y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $x = t^3$,　$y = \sqrt{t^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g\prime(t)}{f'(t)}$　ここで、$x = t^3 = g(t)$,　$y = \sqrt{t^3}$ とすると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dt^{\frac{3}{2}}}{dt} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dt^3}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}{3t^2} = \frac{1}{2}\,t^{-\frac{3}{2}}$$

問題１－３

(1) $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$　　(2) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

(3) $\int x^{-4}dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$　(4) $\int \sqrt[3]{x^4}dx = \int x^{\frac{4}{3}}\, dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C$

(5) $\int (x^2 + 5x + 4)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + C$

(6) $\int (x^4 + x^2 + 6)\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 6x + C$

(7) $\int (x-1)\,(x+2)\, dx = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(8) $\int e^x\, sin\, x\ \ dx = e^x\, sin\, x - \int e^x \cos x$

$= e^x\, sin\, x - [e^x \cos x + \int e^x \sin x\ \ dx]$

$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$+C

(9) $\int x\ \log x\ \ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\, dx$

$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$

$= \frac{x^2}{2}2\log$ 〚x − 1〛 $+ C$

(10) $\int \left(x + \frac{2}{x}\right)^2\ dx = \int (x^2 + 4 + 4x^{-2})\, dx = \frac{1}{3}x^3 + 4x - 4x^{-1} + C$

(11) $\int \cos(4x-1)\, dx = I$ とする。

$4x - 1 = t$ とおくと $dx = \frac{dt}{4}$　したがって、

$$\mathrm{I} = \int \cos(t)\, \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos(t)\, dt = \ = \frac{1}{4}\,[-\sin(t)] + C\ = \frac{1}{4}[-sin(4x-1)] + C$$

(12) $\int cos^3 x\ \ dx = \int \cos x\,(1 - sin^2 x)\, dx$

$= \int (\cos x - \cos x\, sin^2 x)\, dx$

$= sin\, x - [sin\, x\, sin^2 x + \int sin\, x\ 2\ sinx\, cos\, x\, dx]$

$= sin\, x - sin^3 x + 2\, sin\, x - 2\int cos^3 dx$

$$= sin\,x - \frac{sin^3 x}{3} + \mathrm{C}$$

問題１－４

(1) $\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4$ (2) $\int_0^2 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{2}{3}$

(3) $\int_0^3 e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{\,2x}}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{2}(e^6 - e^0) = \frac{1}{2}(e^6 - 1)$

(4) $\int_0^{\pi} sin\,x\ \,dx = [-cos\,x]_0^{\pi} = (-(-1)+1) = 2$

(5) $\int_0^{\pi} \cos x\ \,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1+0) = 2$

(6) $\int_0^{\pi} sin^2\,x\ \,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,x\ \,dx = 2\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2x)dx = \left[x - \frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \,x\,dx = [\sin x\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$$= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

(8) $\int_0^2 x\,e^{2x}\,dx = \int_0^2\ e^{2x}\,x\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\,x\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\,x\right]_0^2 - \frac{1}{4}\,[e^{2x}\,]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\,2\,e^4 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3e^4+1}{4}$$

(9) $\int_0^1 \sqrt{1-2x}\ dx = I$ とする。ここで、$1-2x=t$ とおくと、$-2dx = dt$ より

$dx = -\frac{1}{2}dt$ 各々の積分範囲は$x：0, 1$ $t：1, -1$となるので、

$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{1-2x}\ dx = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} t\ \mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\ \mathrm{dt} = \frac{1}{4}[t^2]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) = 0$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\ cos\, x\, dx = I$ とする。$\cos x = t$ とおくと、$\cos x\, dx = dt$

各々の積分範囲は$x：0, \frac{\pi}{2}$ $t：0, 1$ となるので、

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\ cos\, x\, dx = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}[t^4]_0^1 = 1$

P56

問１－５

１．

(1) $-11, -8, -5, -2, \cdots\cdots$

解：この数列は、第１項 $a_1 = -11$、公差 $\mathrm{d} = 3$ の等差数列である。

従って、第 10 項までの和$S_{10} = a_1 + (n-1)d = -11 + (10-1)3 = 16$ 。

(2) $12, 18, 24, 30, 36, \cdots\cdots$ 　　12, 18, 24, 30, 36,・・・・・・

解：この数列は、第１項 $a_1 = 12$、公差 $\mathrm{d} = 6$ の等差数列である。

したがって､第 10 項までの和$S_{10} = a_1 + (n-1)d = 12 + (10-1)6 = 66$ 。

(3) $-3,\ 6, -12,\ 24, -48, \cdots\cdots$

解：この数列は、第１項 $a_1 = -3$、公比 $\mathrm{r} = -2$ の等比数列である。

したがって、第 10 項までの和S_{10} は

$$S_{10} = a_1 \frac{(1-r^n)}{1-r} = -3\frac{(1-(-2)^{10-1}}{1-(-2)} = 1023$$

(4) 誤 $-3,\ 12, -48, -192,\ 768, \cdots\cdots$

正 $-3,\ 12, -48,\ 192, -768, \cdots\cdots$

解：この数列は、第１項 $a_1 = -3$、公比 $\mathrm{r} = -4$ の等比数列である。

したがって、第 10 項までの和S_{10} は

$$S_{10} = a_1 \frac{(1-r^n)}{1-r} = -3\frac{(1-(-4)^{10-1}}{1-(-4)} = 629145$$

２． $3,\ 6, 12, 24, 96, 192, \cdots\cdots$

解：各項の比を求めると$\mathrm{r} = 2$ と一定になるから等比数列である。

更に、第１項$a_1 = 3$ ，　公比$\mathrm{r} = 2$ 　が判る。

したがって、一般項は $a_{n+1} = r\, a_n$ ，

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

上式より$\mathrm{n} \to \infty$ では $\lim_{n\to\infty} 3 \cdot 2^{n-1} = \infty$ 　正の無限大に発散。

３．

(1) $a_n = 3^n$ 　　解 $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$ 　正の無限大に発散。

(2) $a_n = (-2)^n$ 解 n = 2m 偶数 $\lim_{n\to\infty}(-2)^{2m} = \infty$

n = 2m+1 奇数 $\lim_{n\to\infty}(-2)^{2m+1} = -\infty$ ±∞で振動。

(3) $a_n = 3 + \frac{2}{n}$ 解 $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right) = 3$ 3 に収束。

４.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{3}}$ $C_0 = f(0) = 1$

$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)(-1)(1-x)^{-\frac{2}{3}}$ $C_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -\frac{1}{3}$

$f''(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(-1)(1-x)^{-\frac{5}{3}}$ $C_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{1}{9}$

$f'''(x) = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(-1)(1-x)^{-\frac{8}{3}}$ $C_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}\left(-\frac{10}{27}\right) = -\frac{10}{162}$

したがって、$f(x) = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)x + \left(-\frac{1}{9}\right)x^2 + \left(-\frac{10}{162}\right)x^3 + \cdots\cdots$

５．

$$f(x) = cos\,x$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

上式の第 3 項と第 6 項まで求める。

$f(x) = \ cos\,x$ $\qquad C_0 = f(0) = 1$

$f'(x) = \ -\sin x$ $\qquad C_1 = \frac{f\prime(0)}{1!} = 0$

$f''(x) = \ -\cos x$ $\qquad C_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\,(-1) = -1$

$f'''(x) = \ \sin x$ $\qquad C_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!}\ 0 = 0$

$f^{(4)}(x) = \ \cos x$ $\qquad C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{24}1 = \frac{1}{24}$

$f^{(5)}(x) = -\sin x$ $\qquad C_5 = \frac{f^{(4)}(0)}{5!} = \frac{1}{5!}0 = 0$

$f^{(6)}(x) = -\cos x$ $\qquad C_6 = \frac{f^{(4)}(0)}{6!} = \frac{1}{6!}(-1) = -\frac{1}{180}$

以上から第 3 項までは　$f(x) = cos\,x = 1 - \frac{1}{2}x^2$

第 6 項までは　$f(x) = cos\,x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{180}x^6$

６．

(1) $sin(ax)$

$f(x) = \ sin(ax)$ $\qquad C_0 = f(0) = 0$

$f'(x) = \ a\cos(ax)$ $\qquad C_1 = \frac{f\prime(0)}{1!} = a$

$f''(x) = \ -a^2 sin(ax)$ $\qquad C_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0$

$$f'''(x) = -a^3\cos(ax) \qquad C_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{a^3}{3!}$$

$$f^{(4)}(x) = a^4\, sin(ax) \qquad C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$$

$$f^{(5)}(x) = a^5\cos(ax) \qquad C_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{a^5}{5!}$$

$$f^{(6)}(x) = -a^6\sin(ax) \qquad C_6 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -a^7\cos(ax) \qquad C_7 = \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{a^7}{7!}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(x) = ax - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \frac{a^7}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + \cdots$$

$$f'(x) = a - \frac{3a^3}{3!}x^2 + \frac{5a^5}{5!}x^4 - \frac{7a^7}{7!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}\, x^{2n} + \cdots$$

$$= a - \frac{a^3}{2!}x^2 + \frac{a^5}{4!}x^4 - \frac{a^7}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + \cdots$$

$$= a\left(1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\, x^{2n} + \cdots\right)$$

$$= a\cos(ax)$$

(2) e^{ax}

$$f(x) = e^{ax} \qquad C_0 = f(0) = 1$$

$$f'(x) = a\, e^{ax} \qquad C_1 = \frac{f\prime(0)}{1!} = a$$

$$f''(x) = a^2\, e^{ax} \qquad C_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{a^2}{2!}$$

$$f'''(x) = a^3 e^{ax} \qquad C_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{a^3}{3!}$$

$$f^{(4)}(x) = a^4 e^{ax} \qquad C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{a^3}{4!}$$

$f^{(5)}(x) = a^5 e^{ax}$　　　　　　　$C_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{a^5}{5!}$

.　　　　　　　　.

.　　　　　　　　.

.　　　　　　　　.

$f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$　　　　　　　$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a^n}{n!}$

.　　　　　　　　.

.　　　　　　　　.

.　　　　　　　　.

したがって、

$$f(x) = 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^3}{4!}x^4 + \frac{a^5}{5!}x^5 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{a^n}{n!}x^{(n)} + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f'(x) = a + \frac{2a^2}{2!}x + \frac{3a^3}{3!}x^2 + \frac{4a^3}{4!}x^3 + \frac{5a^5}{5!}x^4 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{n\,a^n}{n!}x^{(n-1)} + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$= a\left(1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^4}{4!}x^4 + \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \cdot\ \cdot\ \cdot\right)$$

$$= a\, e^{ax}$$

７.

(1) $\int cos(ax)\ dx$

$$cos(ax) = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdot\cdot\cdot$$

$$\int cos(ax)\ dx = \int\left(1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdot\cdot\cdot\right)dx$$

$$= x - \frac{a^2}{3!}x^3 + \frac{a^4}{5!}x^5 - \frac{a^6}{7!}x^7 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!\,(2n+1)}x^{2n+1} + \cdot\cdot\cdot$$
$$+C_1$$

$$= \frac{1}{a}\left(x - \frac{a^3}{3!}x^3 + \frac{a^5}{5!}x^5 - \frac{a^7}{7!}x^7 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdot\cdot\cdot\right) + \frac{C_1}{a}$$

$= \frac{1}{a}sin(ax) + C$　　　ただし$C = \frac{C_1}{a}$　。

(2) $f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$

$f(x) = (x+1)^{-1}$ $\quad$ $C_0 = f(0) = 1$

$f'(x) = -(x+1)^{-2}$ $\quad$ $C_1 = \frac{f'(0)}{1!} = -1$

$f''(x) = 2(x+1)^{-3}$ $\quad$ $C_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 1$

$f'''(x) = -6(x+1)^{-4}$ $\quad$ $C_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -1$

$f^{(4)}(x) = 24(x+1)^{-5}$ $\quad$ $C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 1$

$f^{(5)}(x) = -120(x+1)^{-6}$ $\quad$ $C_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -1$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n?}n!\,(x+1)^{-(n+1)}$ $\quad$ $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^{n+1}x^n + \cdot\cdot\cdot$$

$$-1 < x < 1$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= (\int 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^{n+1}x^n + \cdot\cdot\cdot)\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdot\cdot\cdot + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdot\cdot\cdot + C$$

$$= log_e(x+1) + C$$

$$\cdot\cdot\cdot + (-1)^n x^n + \cdot\cdot\cdot$$

微分方程式

問２－１

(1) $y' = e^x$

$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \int dy = \int e^x\, dx \qquad y = e^x + C.$

(2) $y' = xy\,(x+2) = \mathrm{y}\,(x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = y\,(x^2 + 2x)$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int (x^2 + 2x)\, dx$$

$$\log y = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) + C_1$$

$$\mathrm{y} = e^{C_1} e^{x(\frac{x^2}{3}+x)}$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{C}\, e^{x(\frac{x^2}{3}+x)}$$　　ただし、$\mathrm{C} = e^{C_1}$

(3) $y' = \frac{\sin x}{\sin y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\int \sin y\, dy = \int \sin x\, dx$$

$$-\cos y = -\cos x + C_1$$

$$y = cos^{-1}(cos\, x + C)$$　　ただし、$\mathrm{C} = -C_1$

(4) $y' = \frac{x-y}{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$(x-y)dx - (x+y)dy = 0$$

$\mathrm{p} = (\mathrm{x} - \mathrm{y}), \quad p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = -1. \qquad q = -(x+y), \quad q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = -1$

$p_y = q_x$ なので式は完全微分方程式になります。求める解を $u(x,y)$ とすると、

$$\mathrm{u} = \int p\,dx + \int \left[q - \frac{\partial}{\partial y} \int p\,dx \right] dy$$

$$= \int (x-y)\,dx + \int \left[-(x+y) - \frac{\partial}{\partial y} \int (x+y)\,dx \right] dy$$

$$= \frac{x^2}{2} - xy + \int \left[-(x+y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} - xy \right) \right] dy$$

$$= \frac{x^2}{2} - xy + \int [-(x+y) + x] dy$$

$$= \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = C$$

従って、$\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = C$ 。

(5) $y' = -\frac{2xy}{x^2-y^2}$ （問題左辺に一記号が抜けていました）

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$2xy\,dx + (x^2-y^2)dy = 0$$

$\mathrm{p} = 2xy,\quad p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 2x\,.\qquad q = x^2 - y^2,\quad q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$

$p_y = q_x$ なので、式は完全微分方程式になります。求める解を $u(x,y)$ とすると、

$$\mathrm{u} = \int 2xy\,dx + \int \left[(x^2-y^2) - \frac{\partial}{\partial y} \int 2xy\,dx \right] dy$$

$$= \int 2xy\,dx + \int \left[(x^2-y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) \right] dy$$

$$= \int 2xy\,dx + \int [(x^2-y^2) - x^2] dy$$

$$= x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = \mathrm{C}$$

従って、$x^2 y - \frac{1}{3} y^3 = \mathrm{C}$。

(6) $y' = x - y$

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

これは $p(x) = 1,\ q(x) = x$　の線形微分方程式だから、求める y は

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{-\int 1\,dx}\left[\int x\, e^{\int 1\,dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{-x}[e^{x}x - \int e^{x}\,dx + C]$$
$$= e^{-x}[e^{x}x - e^{x} + C]$$
$$= \mathrm{x} - 1 + \mathrm{C}e^{-x}$$

(7) $y' = x^2 - \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2$$

これは $p(x) = \frac{1}{x}$ ， $q(x) = x^2$　の線形微分方程式だから、求める y は

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left[\int x^2\, e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{\log x^{-1}}\left[\int x^2\, e^{\log x}\, dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{x}[\int x^2\, x\, dx + C]$$
$$= \frac{1}{x}[\int x^3\ \ dx + C]$$
$$= \frac{1}{x}\left[\frac{x^4}{4} + C\right]$$
$$= \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

(8) $y' - y = x + 1$

$$\frac{dy}{dx} - y = x + 1$$

これは$p(x) = -1$ ， $q(x) = x + 1$　の線形微分方程式だから、
求めるyは

$$y = e^{-\int -1\,dx}\left[\int (x+1)\, e^{\int -1\,dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{x}[\int (x+1)\, e^{-x}\, dx + C]$$
$$= e^{x}[-e^{x}(x+1) + \int e^{-x}\, dx + C]$$
$$= e^{x}[-e^{x}(x+1) - e^{-x} + C]$$
$$= -(x+1) - 1 + Ce^{x}$$
$$= -(x+2) + Ce^{x}$$

(9) $y' + 2y = y^2$（誤り）　→　$y' + 2y = x^2$　（正）。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$$

これは$p(x) = 2$ ， $q(x) = x^2$　の線形微分方程式だから、
求めるyは

$$y = e^{-\int 2\,dx}\left[\int x^2\, e^{\int 2\,dx}\, dx + C\right]$$
$$= e^{-2x}[\int x^2\, e^{2x}\, dx + C]$$
$$= e^{-2x}\left[\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}\int e^{2x}2x\, dx + C\right]$$
$$= e^{-2x}\left[\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \left(\frac{e^{2x}}{2}x - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right) + C\right]$$
$$= e^{-2x}\left[\frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{e^{2x}}{2}x + \frac{1}{4}e^{2x} + C\right]$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{2x}$$

(10)　$y' + y = -\frac{x}{y}$　（誤り）→ $y' + y = -\frac{y}{x}$ (正)

$\frac{dy}{dx} + y = -\frac{y}{x}$

ここで、$\frac{y}{x} = u$ とおくと　$y = xu$ となり、$\frac{dy}{dx} = u + u'x$ となる。

すると、与式は、

$$u + u'x + xu = -u$$
$$u'x + xu = -2u$$
$$u'x = -u(x+2)$$

$u' = \frac{du}{dx}$ だから

$$\frac{du}{dx}x = -u(x+2)$$

変数分離して両辺を積分すれば、

$$\int \frac{1}{u}\,du = -\int \left(\frac{x+2}{x}\right) dx$$

$$\log u = -\int \left(1 + \frac{2}{x}\right)\,dx$$
$$= -(x + 2logx) + C_1$$
$$u = e^{c_1}\,e^{-(x+2logx)}$$
$$= \mathrm{C}\,x^{-2}e^{-x}$$　　ただし、$\mathrm{C} = e^{c_1}$.

$\mathrm{u} = \frac{y}{x}$ なので、　$\frac{y}{x} = \mathrm{C}\,x^{-2}e^{-x}$

$$y = C\,x^{-1}e^{-x}$$

(11) $(y+3x)dx + xdy = 0$

$p = y + 3x$, $p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 1$ 　また、 $q = x$, 　$q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 1$

$p_y = q_x$ なので、式は完全微分方程式になります。求める解を$u(x,y)$とすると、

$$\mathrm{u} = \int p\,dx + \int \left[q - \frac{\partial}{\partial y}\int p\,dx\right] dy$$

$$u = \int (y+3x)\,dx + \int \left[x - \frac{\partial}{\partial y}\int (y+3x)\,dx\right] dy$$

$$= xy + \frac{3}{2}x^2 + \int \left[x - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{3}{2}x^2\right)\right] dy$$

$$= xy + \frac{3}{2}x^2 + \int (x - x)dy$$

$$= xy + \frac{3}{2}x^2 = C$$

従って、$xy + \frac{3}{2}x^2 = C$ 。

(12) $(y-x)dx + \left(\frac{1}{y^2} + x\right)dy = 0$

$p = y - x$, $p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 1$ 　また、 $q = \left(\frac{1}{y^2} + x\right)$, 　$q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 1$

$p_y = q_x$ なので、式は完全微分方程式になります。求める解を$u(x,y)$とすると、

$$u = \int (y-x)\,dx + \int \left[\left(\frac{1}{y^2} + x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\int (y-x)\,dx\right] dy$$

$$= xy - \frac{1}{2}x^2 + \int \left[\left(\frac{1}{y^2} + x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \frac{1}{2}x^2\right)\right] dy$$

$$= xy - \frac{1}{2}x^2 + \int \left(\frac{1}{y^2} + x - x\right) dy$$

$$= xy - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{1}{y^2} dy$$

$$= xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} = C$$

従って、 $xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} = C$ 。

(13) $2xydx + (y^2 - x^2) = 0$ （誤り）→ $2xydx - (y^2 - x^2)dy = 0$（正）

$p = 2xy$ ， $p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 2x$ また、 $q = -(y^2 - x^2)$ ， $q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$

$p_y = q_x$ なので、式は完全微分方程式になります。求める解を$u(x,y)$とすると、

$$u = \int 2xy\,dx + \int \left[-(y^2 - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}\int 2xy\,dx\right] dy$$

$$= x^2y + \int \left[-(y^2 - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right] dy$$

$$= x^2y + \int [-(y^2 - x^2) - x^2]\,dy$$

$$= x^2y - \int y^2 dy$$

$$= x^2y - \frac{1}{3}y^3 = C$$

従って、 $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = C$ 。

(14) $(x^2 + y^2)dx - 2\mathrm{xy} = 0$ （誤り）→ $(x^2 + y^2)dx + 2\mathrm{xy} = 0$（正）

$p = (x^2 + y^2)$ ， $p_y = \frac{\partial p}{\partial y} = 2x$ また、 $q = 2xy$ ， $q_x = \frac{\partial q}{\partial x} = 2x$

$p_y = q_x$ なので、式は完全微分方程式になります。求める解を$u(x,y)$とすると、

$$u = \int (x^2 + y^2)\,dx + \int \left[2xy - \frac{\partial}{\partial y}\int (x^2 + y^2)\,dx\right] dy$$

$$= \frac{x^3}{3} + xy^2 + \int \left[2xy - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\right] dy$$

$$= \frac{x^3}{3} + xy^2 + \int [2xy - 2xy]\,dy$$

$$= \frac{x^3}{3} + xy^2$$

$$= \frac{x^3}{3} + xy^2 = C$$

従って、 $\frac{x^3}{3} + xy^2 = C$ 。

問２－２

(1) $y'' - 2y' - 3y = 0$

方程式　$y'' + ay' + by = 0$ の判別式　$a^2 - 4b = 2^2 + 12 > 0$　二つの実根。

この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = -1,\ 3$$

求める方程式の解は、　$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ 。

(2) $y'' - 3y' - 4y = 0$

判別式は　$a^2 - 4b = (-3)^2 + 12 > 0$　二つの実根。

この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda = -1,\ 4$$

求める方程式の解は、　$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$ 。

(3) $y'' + 4y' + 4y = 0$

判別式は　$a^2 - 4b = 4^2 + 16 > 0$　二つの実根。

この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda = -2$$　重根。

求める方程式の解は、　$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x}$ 。

(4) $y'' + 6y' + 9y = 0$

判別式は　$a^2 - 4b = 6^2 + 36 > 0$　二つの実根。

この微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda = -3$$　重根。

求める方程式の解は、　$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x}$ 。

(5) $y'' - 3y' + 4y = 0$

判別式は　$a^2 - 4b = (-3)^2 - 36 = -27 < 0$　複素共役な根。

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$y_{11} = (\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))e^{\alpha x}$$
$$y_{22} = (\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))e^{\alpha x}$$

$y_r = \frac{y_{11}+y_{22}}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$　,　$y_i = \frac{y_{11}-y_{22}}{2} = e^{\alpha x}\,sin(\beta x)$

解は、$y = y_r + y_i = (\,C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))e^{\alpha x}$

従って、解は$y = y_r + y_i = \left(\,C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)e^{\frac{3}{2}x}$　。

(6) $y'' - 2y' + 4y = 0$

判別式は　$a^2 - 4b = (-2)^2 - 16 = -12 < 0$　複素共役な根。

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$
$$\alpha = -1, \quad \beta = \sqrt{3}$$

従って、解は　$y = (\,C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$

(7) $y'' - 5y' + 6y = 17e^{-3x}$

この定数係数非同次微分方程式の右辺の$r(x) = 17e^{-3x}$ より、$A = 17, \alpha = -3$　。

一方、対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = 2, 3$ となり、$\alpha = -3$ と異なります。

このために特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = Ke^{-3x}$$

これを問題に代入し、K を求める。

$$\begin{aligned} u'' - 2u' + 4u &= (Ke^{-3x})'' - 5(Ke^{-3x})' + 6\,Ke^{-3x} \\ &= 9Ke^{-3x} + 15Ke^{-3x} + 6Ke^{-3x} \\ &= 30Ke^{-3x} \end{aligned}$$

となる。$r(x) = 17e^{-3x}$ を比較すると

$$17e^{-3x} = 30Ke^{-3x}$$

$$K = \frac{17}{30}\text{ 。}$$

求める特殊解は　$u(x) = \frac{17}{30}e^{-3x}$ となる。

(8) $y'' - 2y' + 6y = 10e^{-3x}$（誤り）→　$y'' - y' - 3y = 10e^{-3x}$　（正）

この定数係数非同次微分方程式の右辺の$r(x) = 10e^{-3x}$ より、$A = 10,\ \alpha = -3$ 。

一方、対応する同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$\lambda = -2, 3$ となり、$\alpha = -3$ と異なります。

このために特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = Ke^{-3x}$$

これを問題に代入し、K を求める。

$$\begin{aligned} u'' - u' - 3u &= (Ke^{-3x})'' - (Ke^{-3x})' - 3Ke^{-3x} \\ &= 9Ke^{-3x} + 3Ke^{-3x} - 3Ke^{-3x} \\ &= 9Ke^{-3x} \end{aligned}$$

となる。$r(x) = 10e^{-3x}$ を比較すると

$$10e^{-3x} = 9Ke^{-3x}$$

$$K = \frac{10}{9}\text{ 。}$$

求める特殊解は　$u(x) = \frac{10}{9}e^{-3x}$ となる。

(9) $y'' - 3y' + 4y = 5e^{-3x}$（誤り）→　$y'' - 4y' + 3y = 5e^{3x}$　（正）

この定数係数非同次微分方程式の右辺の$r(x) = 5e^{3x}$ より、$A = 5, \alpha = 3$

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = 1, 3$ となり、$\alpha = 3$ は同次方程式の一つの根と同じ。

このために特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = Kxe^{3x} \quad ただし、K = \frac{A}{P'}$$

これを問題に代入し、K を求める。

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 3u &= (Kxe^{3x})'' - 4(Kxe^{3x})' + 3Kxe^{3x} \\ &= (Ke^{3x} + 3Kxe^{3x})' - 4(Ke^{3x} + 3Kxe^{3x}) + 3Ke^{3x} \\ &= 3Ke^{3x} + 3Ke^{3x} + 9Ke^{3x} - 4Ke^{3x} - 12Kxe^{3x} + 3Kxe^{3x} \\ &= (3K + 3\mathrm{K} + 9\mathrm{Kx} - 4K - 12Kx + 3Kx)e^{3x} \\ &= 2Ke^{3x} \end{aligned}$$

となる。$r(x) = 5e^{3x}$ を比較すると

$$5e^{-3x} = 2Ke^{-3x}$$

$$K = \frac{5}{2}$$

求める特殊解は　$u(x) = \frac{5}{2}xe^{3x}$ となる。

(10) $\mathrm{y}'' - 4y' + 12y = 4e^{2x}$（誤り）→ $\mathrm{y}'' + 4y' - 12y = 4e^{2x}$

この定数係数非同次微分方程式の右辺の$r(x) = 5e^{2x}$ より、$\mathrm{A} = 4, \alpha = 2$

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + 4\lambda = 12 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 6) = 0$$

$\lambda = -6,\ 2$ となり、$\alpha = 2$ は同次方程式の一つの根と同じ。

このために特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = Kxe^{2x} \quad ただし、K = \frac{A}{P'}$$

これを問題に代入し、K を求める。

$$\begin{aligned} u'' + 4u' - 12u &= (Kxe^{2x})'' + 4(Kxe^{2x})' - 12Kxe^{2x} \\ &= (Ke^{2x} + 2Kxe^{2x})' + 4(Ke^{2x} + 2Kxe^{2x}) - 12Kxe^{2x} \\ &= 2Ke^{2x} + 2Ke^{2x} + 4Kxe^{2x} + 4Ke^{2x} + 8Kxe^{2x} - 12Kxe^{2x} \\ &= (2K + 2\mathrm{K} + 4\mathrm{Kx} + 4K + 8Kx - 12Kx)e^{2x} \\ &= 8Ke^{2x} \end{aligned}$$

となる。$r(x) = 4e^{2x}$ と比較すると

$$4e^{-3x} = 8Ke^{-2x}$$

$$K = \frac{1}{2}$$

求める特殊解は　$u(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$　となる。

(11) $y'' + y' - 12y = 10\cos x$（修正なしでこのまま解く）

右辺の$r(x) = 10\cos x$より、$A = 10,\ \beta = 1$。

問題の同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = -4,\ 3 \quad \text{実根。}$$

特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = K\cos x + L\sin x$$

と仮定。

$$\begin{aligned} u''(x) + u'(x) - 12u &= (K\cos x + L\sin x)'' + (K\cos x + L\sin x)' \\ &\qquad - 12(K\cos x + L\sin x) \\ &= (-K\sin x + L\cos x)' + (-K\sin x + L\cos x) \\ &\qquad - 12(K\cos x + L\sin x) \\ &= -K\cos x - L\sin x - K\sin x + L\cos x \\ &\qquad - 12K\cos x - 12L\sin x \\ &= (-K + L - 12K)\cos x + (-L - K - 12L)\sin x \end{aligned}$$

となる。これと問題の $r(x) = 10\cos x$ と比較から、

$$-K + L - 12K = 10$$

$$-L - K - 12L = 0$$

この二つの式からK と L を求めると、

$$K = -\frac{13}{17}, \quad L = \frac{1}{17}$$

従って、特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = -\frac{13}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$$

(12) $y'' + y' = 5\cos x$

右辺の $r(x) = 5\cos x$ より、$A = 5,\ \beta = 1$。

問題の同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 0, -1 \quad \text{実根。}$$

特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = K\cos x + L\sin x$$

と仮定。

$$\begin{aligned} u''(x) + u'(x) &= (K\,cos\,x + L\,sin\,x)'' + (K\,cos\,x + L\,sin\,x)' \\ &= (-K\,sin\,x + L\,cos\,x)' + (-K\,sin\,x + L\,cos\,x) \\ &= -K\,cos\,x - L\,sin\,x - K\,sin\,x + L\,cos\,x \\ &= (-K + L)\,cos\,x + (-L - K)\,sin\,x \end{aligned}$$

となる。これと問題の $r(x) = 5\cos x$ と比較から、

$$-K + L = 5$$

$$-L - K = 0$$

この二つの式からK と L を求めると、

$$K = -\frac{5}{2}\ ,\quad L = \frac{5}{2}$$

従って、特殊解 $u(x)$ は

$$u(x) = -\frac{5}{2}\cos x + \frac{5}{2}\sin x$$