3-1

1~4 略

5. $\dfrac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$

6. 前問 5. について第一移動定理(表 3.1 の⑤)を適用すると

$$\frac{2a(s-b)}{\left\{(s-b)^2+a^2\right\}^2}$$

表 3.1 の④を適用しても同じ結果が得られます。

3-2

1. (1) $\dfrac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)$

(2) $2e^{-3t}\cos 2t$

(3) $2-3e^{-t}+e^{-3t}$

(4) $\dfrac{t^3}{6}e^{2t}+te^{2t}$

(5) $\dfrac{e^{-3t}}{3}(1-\cos 3t)$

(6) $\dfrac{1}{3}(1-\cos 3t)$

(7) $te^{-3t}\sin t$

(8) $3e^{-2t}\sin t+e^{-2(t-1)}\sin(t-1)\cdot u(t-1)$

2.

(1) $f(t)=t^2, g(t)=e^t$ として $f(t)*g(t)=\int_0^t x^2e^{t-x}dx=-t^2-2t-2+2e^t$

(2) $f(t)=\cos at, g(t)=\cos at$ として

$$f(t)*g(t)=\int_0^t \cos ax\cos a(t-x)dx=\frac{1}{2}t\cos at+\frac{1}{2a}\sin at$$

(3) $f(t)=\sin 2t, g(t)=e^t$ として

$$f(t)*g(t)=\int_0^t \sin 2x\cdot e^{t-x}dx=\frac{1}{5}\left(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t\right)$$

3-3

1. $Y(s)=\dfrac{3}{s^2+9}$ より $y(t)=\sin 3t$

2. $Y(s)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+4}\right)$ より $y(t)=\dfrac{1}{4}\left(1-e^{-4t}\right)$

3. $Y(s)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$ より $y(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

4. $Y(s)=\dfrac{bs^2+cs+a}{s\cdot\left(s^2+\omega^2\right)}$ より $y(t)=\dfrac{a}{\omega^2}-\dfrac{a-b\omega^2}{\omega^2}\cos\omega t+\dfrac{c}{\omega}\sin\omega t$

5. $Y(s)=\dfrac{8(s+1)}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+1\right)}$ より $y(t)=-\cos 3t-\dfrac{1}{3}\sin 3t+\cos t+\sin t$

6. $Y(s)=\dfrac{1-e^{-s}+s^2}{s\left(s^2+4\right)}$ より $y(t)=\dfrac{1}{4}(1+3\cos 2t)-\dfrac{1}{4}[1-\cos 2(t-1)]u(t-1)$

7. $Y(s)=\dfrac{e^{-s}+3}{s^2+4s+7}$ より $y(t)=\sqrt{3}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{-2(t-1)}\sin\sqrt{3}(t-1)\cdot u(t-1)$

4-1

(1) $f(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} \sin nx$

(2) $f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$

(3) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2}(-1)^n \cos nx + \left\{ -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3 \pi} \left\{ (-1)^n - 1 \right\} \right\} \sin nx \right]$

4-2

1. $f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2a \sin \omega a}{\pi \omega} + 2 \cdot \frac{1 - a\omega \sin \omega a - \cos \omega a}{\pi \omega^2} \right\} \cos \omega x d\omega$

2. $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \pi \omega}{\pi (1 - \omega^2)} \sin \omega x d\omega$

4-3

1. (a) $F(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi} \cdot \omega} \left(e^{-i\omega} - 1 \right)$, (b) $F(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi} \cdot \omega} e^{-i2\omega} \left(e^{-i\omega} - 1 \right)$

2. $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (1 + i\omega)^2}$

4-4 （フーリエ変換を用いた場合、特殊解（定常解）のみが現れます。）

(1) $f(t) = \frac{1}{5} (\sin t - 2 \cos t)$

（一般解は $f(t) = \frac{1}{5} (\sin t - 2 \cos t) + C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t$ 、C_1, C_2 は定数）

(2) $f(t) = \frac{1}{3 + 4i\omega_o - \omega_o^2} e^{i\omega_o t} = \frac{1}{(1 + i\omega_o)(3 + i\omega_o)} e^{i\omega_o t}$

（一般解は $f(t) = \frac{1}{(1 + i\omega_o)(3 + i\omega_o)} e^{i\omega_o t} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ 、C_1, C_2 は定数）

5-1

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(3,t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(2,t)=0 \end{cases}$$ (問題文訂正)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{3n\pi}{2}t\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{3n\pi}{2}t\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x$$

または

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\cos\frac{3(2m-1)\pi}{2}t\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi}{2}x$$

5-2

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi t\cdot\sin n\pi x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\sin\frac{n\pi}{10}\cdot\cos 2n\pi t\cdot\sin n\pi x$$

または

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\sin\frac{(2m-1)\pi}{10}\cdot\cos 2(2m-1)\pi t\cdot\sin(2m-1)\pi x$$

5-3

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{2}x\cdot e^{-\frac{5}{4}n^2\pi^2 t}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x\cdot e^{-\frac{5}{4}n^2\pi^2 t}$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x\cdot e^{-\frac{5}{4}n^2\pi^2 t}$$

5-4

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}A(k)\cos kx\cdot e^{-k^2 t}dk=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin k}{k}\cos kx\cdot e^{-k^2 t}dk$$

5-5

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

$$=\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\cdot\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)^{-1}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

または

$$u(x,y)=\frac{4a}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left((2m-1)^2\cdot\sinh\frac{(2m-1)\pi b}{a}\right)^{-1}(-1)^{m+1}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi}{a}x\cdot\sinh\frac{(2m-1)\pi}{a}y$$