

第1章 演習問題 解答

- (1) (i) 音楽信号の低音部を強調して再生する。
 (ii) マイクに向けて発話した音声をテキストデータに変える。
 (iii) テキストデータ (例えば文章) を音声読み上げする。
 (iv) jpeg 画像ファイルを png 画像ファイルに変換する。

第2章 演習問題 解答

- (1) (i) $\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \triangleq x_1(t) + x_2(t)$ とおく. $x_1(t), x_2(t)$ の角周波数 (ω_1, ω_2) および基本周期 (T_1, T_2) はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{4}, & T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 8 \\ x_2(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \rightarrow \omega_2 = \frac{\pi}{3}, & T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 6 \end{cases}$$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{8}{6}$ は有理数であるから, この信号は周期的であり, 基本周期は $3T_1 = 4T_2 = 24$ となる.

- (ii) $\cos t + \sin(\sqrt{2}t) \triangleq x_1(t) + x_2(t) = x(t)$ とおく. $x_1(t), x_2(t)$ の角周波数 (ω_1, ω_2) および基本周期 (T_1, T_2) はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t \rightarrow \omega_1 = 1, & T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \\ x_2(t) = \sin(\sqrt{2}t) \rightarrow \omega_2 = \sqrt{2}, & T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \sqrt{2}\pi \end{cases}$$

$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$ は有理数ではないので, $x(t)$ は非周期的である.

- (iii) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{\pi}{4}n) \triangleq x_1[n] + x_2[n] = x[n]$ とおく. このとき, $x_1[n] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1)^n$ は基本周期 $N_1 = 1$ の周期信号, $x_2[n] = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n$ は基本周期 $N_2 = 8$ の周期信号である. N_1 と N_2 の最小公倍数 8 であるので, $x[n]$ は基本周期 8 の周期信号となる.
- (iv) $e^{j(\frac{\pi}{2})n} \triangleq e^{j\Omega_0 n}$ とおくと $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$ であり, $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4}$ は有理数である. 従って, この信号は周期的であり, 基本周期は $\frac{2\pi}{\Omega_0} = 4$ である.
- (v) $\cos\left(\frac{1}{6}n\right) \triangleq \cos(\Omega_0 n)$ とおく. このとき, $\Omega_0 = \frac{1}{6}$ であるが, $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12\pi}$ は有理数でないから, この信号は非周期的である.

- (2) $x[n]$ は周期 N の周期信号, すなわち $x[n] = x[n + N]$ であるから, $n = m - N$ とすると,

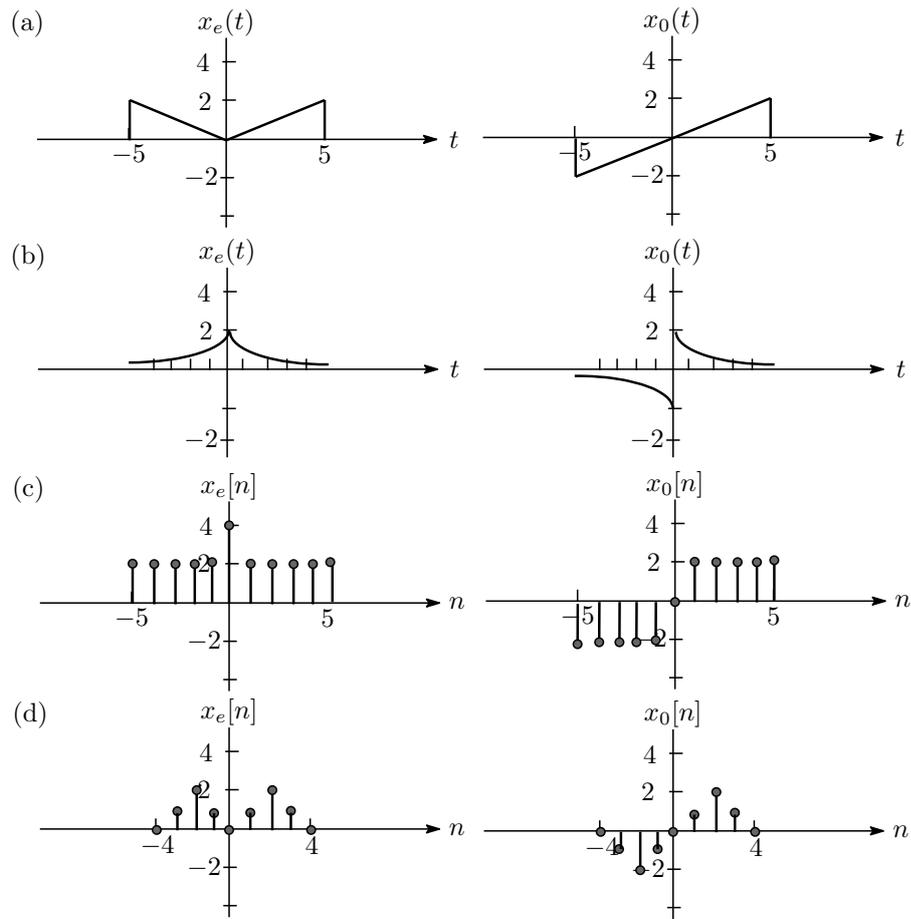
$$x[m - N + N] = x[m] = x[m - N] \tag{1}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n x[k] &= \sum_{m=n_0+N}^{n+N} x[m - N] \quad (m = k + N \text{ として変数変換}) \\ &= \sum_{m=n_0+N}^{n+N} x[m] \quad (\text{式 (1) より}) \\ &= \sum_{k=n_0+N}^{n+N} x[k] \quad (m \text{ を改めて } k \text{ とおく}) \end{aligned}$$

が導かれる.

(3) 次の通り.



(4) $x_1[n], x_2[n]$ はそれぞれ基本周期 N_1, N_2 の周期信号であるから,

$$\begin{cases} x_1[n] = x_1[n + N_1] = x_1[n + mN_1] & (m: \text{自然数}) \\ x_2[n] = x_2[n + N_2] = x_2[n + kN_2] & (k: \text{自然数}) \end{cases}$$

が成り立つ. それゆえ,

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2]$$

とおける. ここで, N_1, N_2 はともに整数であるので,

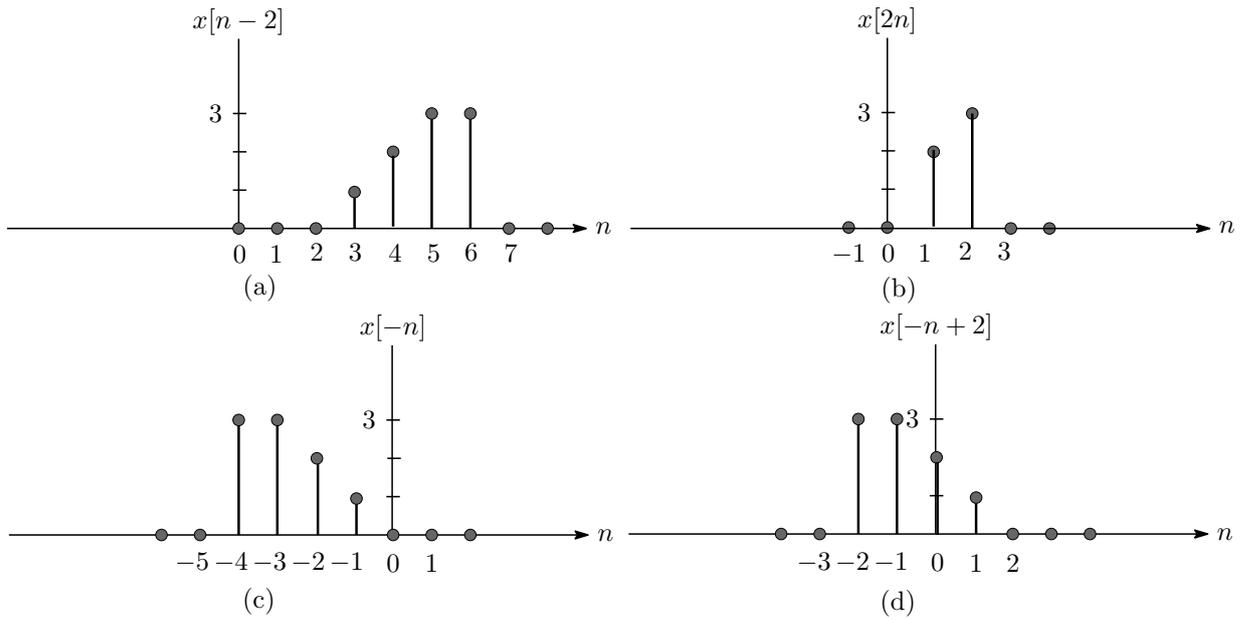
$$mN_1 = kN_2$$

を満足する自然数 m, k の組み合わせが必ず存在し, そのときの m, k を用いて $mN_1 = kN_2 = N$ とおくと,

$$x[n + N] = x_1[n + N] + x_2[n + N] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2] = x[n]$$

が成り立つ. 従って, $x[n]$ は常に周期的となり, その基本周期は N_1 と N_2 の最小公倍数となる.

(5) 次の通り.



(6) $x(t)$ が $x(t+T) = x(t)$ すなわち

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$$

を満たせば周期的となる. ここで,

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

であるから,

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

を満たす必要がある. $\omega_0 = 0$ ならば $x(t) = 1$ であり, 任意の T で周期的. 一方, $\omega_0 \neq 0$ ならば,

$$\omega_0 T = m2\pi \iff T = m \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (m : \text{正の整数})$$

が成り立つとき, $e^{j\omega_0 T} = 1$ を満たし, $x(t)$ は周期的となる. その基本周期 T_0 は, 上式を満たす T のうち最小の正の数であり, 従って $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

(7) 全ての N について $x[n+N] = x[n]$ が満たされるのは

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

のとき, すなわち

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \tag{2}$$

のときであり, このときのみ $x[n]$ は周期的となる. 式 (2) は

$$\Omega_0 N = m2\pi \quad (m : \text{自然数})$$

すなわち

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = \text{有理数}$$

のときのみ成り立つ. 従って, $x[n]$ は $\Omega_0/2\pi$ が有理数のときのみ周期的となる.

(8) 基本周期 N_0 で $x[n]$ が周期的となるとき,

$$e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} e^{j\omega_0 N_0 T_s} = e^{j\omega_0 n T_s}$$

である. 上式が成り立つための条件は,

$$e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1 \iff \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m2\pi \quad (m: \text{自然数})$$

すなわち

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} = \text{有理数}$$

である. ゆえに T_s/T_0 が有理数ならば $x[n]$ は周期的となる.

(9) $p[n] = D(x[n]) = x[n] - x[n-1]$, $q[n] = D(y[n]) = y[n] - y[n-1]$ とおく. また,

$$w[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]y[k]$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} D(x[n] * y[n]) &= D(w[n]) = w[n] - w[n-1] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]y[k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(n-1)-k]y[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[n-k] - x[n-k-1])y[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[n-k]y[k] = p[n] * y[n] = D(x[n]) * y[n] \end{aligned}$$

である. 以上より

$$D(x[n] * y[n]) = D(x[n]) * y[n]$$

が導かれる. なお, 畳込みの可換則より,

$$D(x[n] * y[n]) = x[n] * D(y[n])$$

も同様にして導くことができる.

(10) 畳込みの分配則

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

およびデルタ関数に関する性質

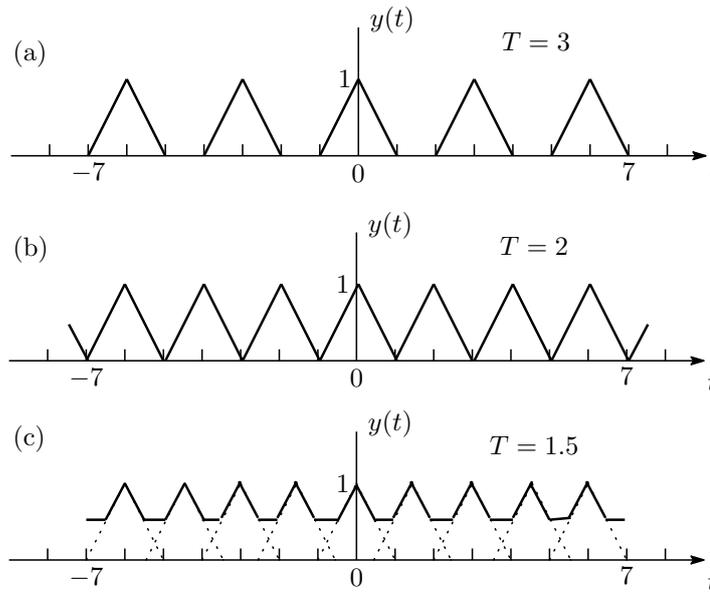
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

を利用して,

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \delta_T(t) = h(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) \end{aligned}$$

を得る. 故に, (a) のときは $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 3n)$, (b) のときは $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2n)$, (c) のときは

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 1.5n)$ であり, 各々を図示すると



となる。 $T < 2$ のとき、三角パルスは分離せず重なり合うことに注意しよう。

第3章 演習問題 解答

- (1) (i) A) $n \neq 0$ において出力が同時刻以外の入力に依存するため満たされる (記憶型)。
 B) $n > 0$ のとき、出力が未来の入力に依存するため満たされない (非因果的)。
 C) $\forall n |x[n]| \leq C$ のとき $\forall n |y[n]| = |x[2n]| \leq C$ なので満たされる (BIBO 安定)。
 D) $z[n] = x[n-n_0]$ に対する出力を $w[n]$ とすると、 $w[n] = z[2n] = x[2n-n_0] \neq x[2(n-n_0)] = y[n-n_0]$ より、満たされない (時不変でない)。
 E) $y_1[n] = x_1[2n]$, $y_2[n] = x_2[2n]$ のとき、 $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ に対する出力が $y[n] = x[2n] = ax_1[2n] + bx_2[2n] = ay_1[n] + by_2[n]$ となるので、満たされる (線形)。
- (ii) A) 時刻 n の出力が時刻 n の入力にのみ依存するので満たされない (無記憶型)。
 B) 出力は同時刻の入力にのみ依存し未来の入力に依存しないので満たされる (因果的)。
 C) $x[n] = u[n]$ とすると $y[n] = nu[n]$ 。ゆえに有界の単位ステップ信号を与えると有界でない信号を出力するので満たされない (BIBO 安定でない)。
 D) $x_1[n] = x[n-n_0]$ を入力したときの出力を $y_1[n]$ とすると

$$y_1[n] = L[x_1[n]] = L[x[n-n_0]] = nx[n-n_0]$$

であるが、一方

$$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0] \neq y_1[n]$$

であるので、満たされない (時不変でない)。

- E) $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ とすると、

$$\begin{aligned} y[n] &= L[x[n]] = n\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} \\ &= \alpha_1 n x_1[n] + \alpha_2 n x_2[n] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n] \end{aligned}$$

であり、

$$L[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2] = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

が満足されるので満たされる (線形)。

- (iii) A) $n \neq 0$ において出力が同時刻以外の入力に依存するため満たされる (記憶型).
 B) $n < 0$ のとき, 出力が未来の入力に依存する (例えば $y[-2] = x[2]$) ため, 満たされない (非因果的).
 C) $\forall n |x[n]| \leq C$ のとき $\forall n |y[n]| = |x[-n]| \leq C$ なので満たされる (BIBO 安定).
 D) $x_1[n] = x[n - n_0]$ を入力したときの出力を $y_1[n]$ とすると,

$$y_1[n] = L[x_1[n]] = x_1[-n] = x[-n - n_0]$$

であるが, 一方,

$$y[n - n_0] = x[-(n - n_0)] = x[-n + n_0] \neq y_1[n]$$

であるので, 満たされない (時不変でない).

- E) $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ とすると

$$y_1[n] = L[x_1[n]] = x_1[-n]$$

$$y_2[n] = L[x_2[n]] = x_2[-n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= L[x[n]] = x[-n] = ax_1[-n] + bx_2[-n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

であるので, 満たされる (線形).

- (iv) A) 時刻 n の出力は時刻 n の入力のみ依存するため満たされない (無記憶型).
 B) 出力が未来の入力に依存しないため満たされる (因果的).
 C) $g[n]$ が有界, すなわち $\forall n |g[n]| \leq C'$ のとき, $\forall n |x[n]| \leq C$ であれば $\forall n |y[n]| = |g[n]||x[n]| \leq CC'$ であるため, BIBO 安定. 一方, $g[n]$ が有界でないとき, すなわち $\forall C' \exists n_0 |g[n_0]| > C'$ のとき, 有界信号 $x[n] = 1$ に対し非有界信号 $y[n] = g[n]$ が得られるため, BIBO 安定でない. 以上より, $g[n]$ が有界のとき, またそのときのみ満たされる ($g[n]$ が有界のときのみ BIBO 安定).
 D) $x_1[n] = x[n - n_0]$ を入力したときの出力を $y_1[n]$ とすると,

$$y_1[n] = L[x_1[n]] = g[n]x_1[n] = g[n]x[n - n_0]$$

であるが, 一方,

$$y[n - n_0] = g[n - n_0]x[n - n_0] \neq y_1[n]$$

であるので, 満たされない (時不変でない).

- E) $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ とすると

$$y_1[n] = L[x_1[n]] = g[n]x_1[n]$$

$$y_2[n] = L[x_2[n]] = g[n]x_2[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= L[x[n]] = g[n]x[n] = ag[n]x_1[n] + bg[n]x_2[n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

であるので, 満たされる (線形).

- (v) A) 出力が現時刻での入力値にのみ依存するので満たされない (無記憶型).
 B) 出力が未来の入力に依存しないので満たされる (因果的).
 C) $|\cos(\omega_c t)| \leq 1$ であるので, $x(t)$ が有界, すなわち $\forall t |x(t)| \leq C$ のとき, $\forall t |y(t)| = |x(t)||\cos(\omega_c t)| \leq |x(t)| \leq C$ である. よって, 満たされる (BIBO 安定).
 D) $x'(t) = x(t - t_0)$ とすると,

$$y'(t) = L[x'(t)] = x'(t) \cos(\omega_c t) = x(t - t_0) \cos(\omega_c t)$$

であるが, 一方,

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos(\omega_c(t - t_0)) \neq y'(t)$$

であるので, 満たされない (時不変でない).

E) $x'(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ および $y_i(t) = L[x_i(t)]$ ($i = 1, 2$) とすると,

$$\begin{aligned} y'(t) &= L[x'(t)] \\ &= \{ax_1(t) + bx_2(t)\} \cos(\omega_c t) \\ &= ax_1(t) \cos(\omega_c t) + bx_2(t) \cos(\omega_c t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) = aL[x_1(t)] + bL[x_2(t)] \end{aligned}$$

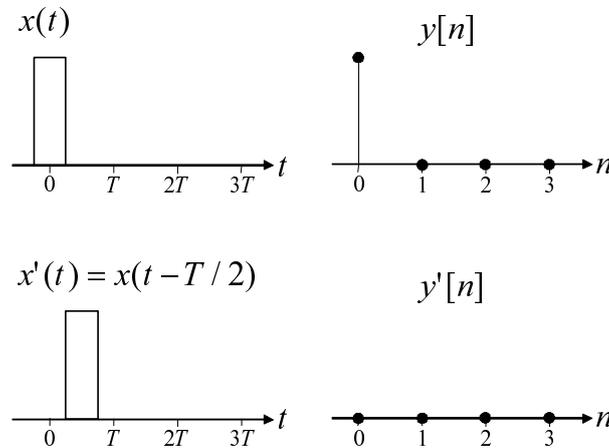
であるので, 満たされる.

(vi) 連続時間信号と離散時間信号の時間軸は異なるので, まず, 「離散時間信号の時間軸上における時刻 n と連続時間信号の時間軸上における時刻 nT は同時刻である」ものと定義する.

- A) $y[n] = x(nT)$ より, 時刻 n における離散時間信号の出力は, 同時刻 nT における連続時間信号の入力にのみ依存するため, 満たされない (無記憶型).
- B) 上記の通り, 出力は同時刻における入力にのみ依存し, その時刻より後の未来の入力には依存しないため, 満たされる (因果的).
- C) 入力が有界であるとき, すなわち, $\forall t |x(t)| < C$ であるとき, 任意の n に対して $|y[n]| = |x(nT)| < C$ となり, 出力は常に有界となる. 故に満たされる (BIBO 安定).
- D) 下図に示す通り, 連続時間信号

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq T/4) \\ 0 & (|t| > T/4) \end{cases}$$

を入力したときと, これを $T/2$ だけ遅らせた $x(t - T/2)$ を入力したときとは, 出力として得られる離散時間信号の波形が異なる. 従って, 満たされない (時不変でない).



E) 連続時間信号 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ を任意に選び, それらに対応する離散時間信号の出力をそれぞれ $y_1[n]$, $y_2[n]$ とすると, $y_1[n] = x_1(nT)$, $y_2[n] = x_2(nT)$ である. このとき, 入力 $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ に対する出力 $y[n]$ は

$$y[n] = x(nT) = ax_1(nT) + bx_2(nT) = ay_1[n] + by_2[n].$$

となるため, 満たされる (線形).

(2) L のインパルス応答を $h[n]$ とすると,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

である。ここで, $n = m + N$ とおくと

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[(m-k)+N]$$

となるが, $x[n]$ は周期 N について周期的であるから

$$x[(m-k)+N] = x[m-k]$$

であり, ゆえに

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m-k] = y[m]$$

が成り立つ。これは出力 $y[n]$ は周期 N で周期的であることを示している。

(3) L は線形かつ時不変なので, $y(t)$ は $x(t)$ と $h(t)$ の畳込みにより求まる。ここで,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 3) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であることに注意すると,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^3 h(t-\tau)d\tau$$

となる。

- $t < 0$ のとき, $0 \leq \tau < 3$ の範囲では常に $t - \tau < 0$ であるので, $h(t - \tau) = 0$ 。よって $y(t) = 0$ 。
- $0 \leq t < 2$ のとき, $0 \leq \tau \leq t$ であれば $t - \tau \geq 0$ すなわち $h(t - \tau) = 1$ であるので,

$$y(t) = \int_0^t d\tau = t.$$

- $2 \leq t < 3$ のとき, $t - 2 \leq \tau \leq t$ であれば $t - \tau \geq 0$ すなわち $h(t - \tau) = 1$ であるので,

$$y(t) = \int_{t-2}^t d\tau = t - (t-2) = 2.$$

- $3 \leq t < 5$ のとき, $t - 2 \leq \tau \leq 3$ であれば $t - \tau \geq 0$ すなわち $h(t - \tau) = 1$ であるので,

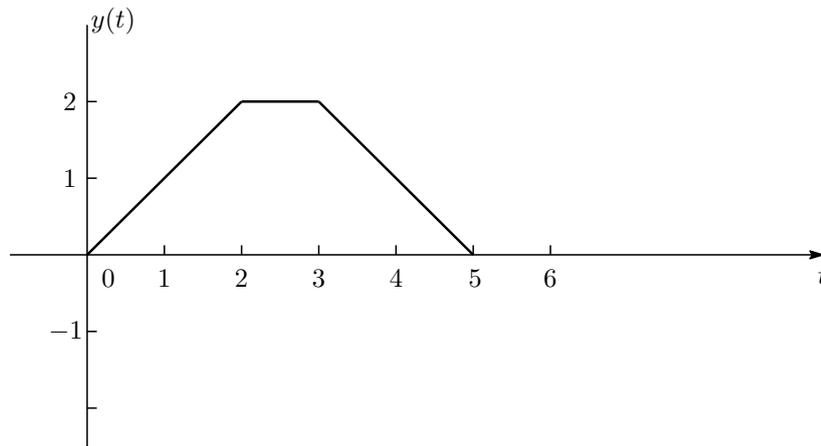
$$y(t) = \int_{t-2}^3 d\tau = 3 - (t-2) = 5 - t.$$

- $t \geq 5$ のとき, $0 \leq \tau < 3$ の範囲では常に $t - \tau > 2$ であるので, $h(t - \tau) = 0$ 。よって $y(t) = 0$ 。

以上をまとめると

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (0 \leq t < 2) \\ 2 & (2 \leq t < 3) \\ 5 - t & (3 \leq t < 5) \\ 0 & (5 \leq t) \end{cases}$$

であり, これを図示すると次のようになる。



(4) L は線形かつ時不変なので, $y[n]$ は $x[n]$ と $h[n]$ の畳込みにより

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k]$$

として求まる.

(i) $x[n] = u[n]$, $h[n] = \alpha^n u[n]$ の場合, $x[k] = u[k]$, $h[n-k] = \alpha^{n-k} u[n-k]$ である. $n < 0$ のとき, この両者は重ならないので, $y[n] = 0$. 一方, $n \geq 0$ のときは $0 \leq k \leq n$ において重なる. 従って,

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k}$$

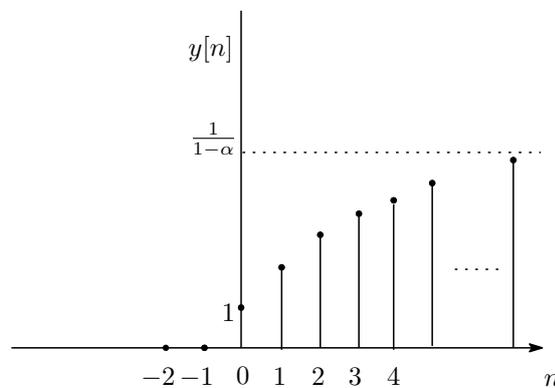
である. ここで, $m = n - k$ とおいて変数を変換すると

$$y[n] = \sum_{m=n}^0 \alpha^m = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

となる. $n < 0$ のときと併せて表記すると

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$

となり, これを図示すると下図のようになる.



(ii) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \alpha^{-n} u[-n]$ の場合, $x[k] = \alpha^k u[k]$, $h[n-k] = \alpha^{k-n} u[k-n]$ である. $n < 0$ のとき, この両者は $k \geq 0$ において重なる. 従って,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \alpha^{k-n} = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \frac{\alpha^{-n}}{1-\alpha^2}$$

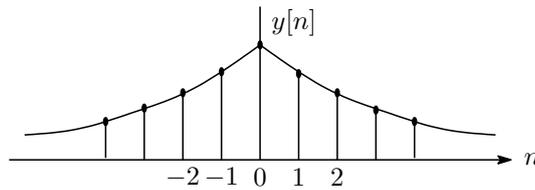
となる. 一方, $n \geq 0$ のときは, $k \geq n$ において重なる. 従って,

$$y[n] = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k \alpha^{k-n} = \alpha^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{-n} \frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2}$$

となる. 以上を併せて表記すると

$$y[n] = \frac{\alpha^{|n|}}{1-\alpha^2}$$

となり, これを図示すると下図のようになる.



(5) まず,

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau) d\tau$$

と展開できる. ここで,

$$\int_{-\infty}^{t+s} x(\tau) d\tau = x(t) * u(t+s)$$

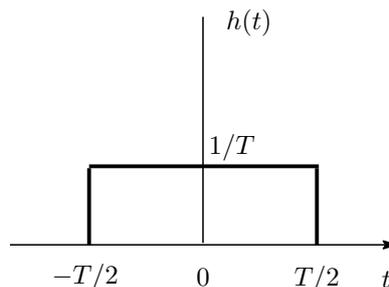
であることから,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T} x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &= x(t) * \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \triangleq x(t) * h(t) \end{aligned}$$

と書ける. 故に

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1/T & (-T/2 < t \leq T/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり, これを図示すると以下のようなになる.



(6) (i) システム L の入出力関係は

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] = x[n] * u[n]$$

と表せる。従って L は線形時不変であり、そのインパルス応答 $h[n]$ は $h[n] = u[n]$ である。

(ii) L は線形時不変なので、そのステップ応答 $s[n]$ は単位ステップ信号 $u[n]$ とインパルス応答 $h[n]$ の畳込みにより求まる。従って、

$$s[n] = u[n] * h[n] = u[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ n+1 & (n \geq 0) \end{cases}$$

であり、別の書き方をすれば、 $s[n] = (n+1)u[n]$ 。

(iii) L の逆システムを L' とし、そのインパルス応答を $h'[n]$ とする。 L と L' を直列につないだシステムが恒等システムになれば良く、また、恒等システムのインパルス応答は $\delta[n]$ であるので、結局、 $h[n] * h'[n] = u[n] * h'[n] = \delta[n]$ であれば良い。ここで、

$$u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

であるから、 $h'[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ と求まる。以上を踏まえ、 L' は、その入出力関係が

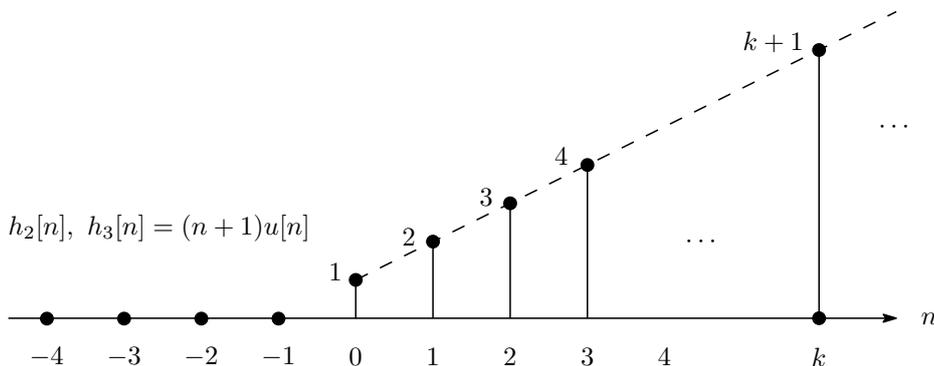
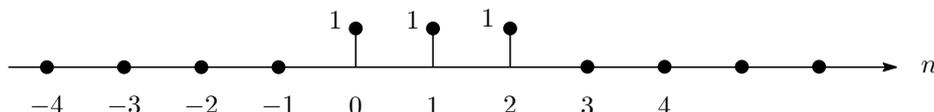
$$y[n] = x[n] * h'[n] = x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = x[n] - x[n-1]$$

で与えられるシステム、すなわち差分器である。

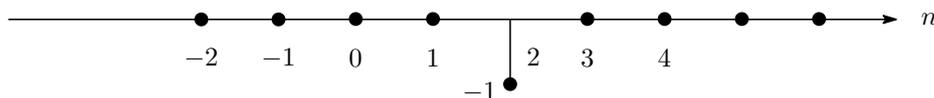
(7) (i) $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n] * h_4[n])$

(ii) $h_i[n]$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を図示すると次のようになる。

$$h_1[n] = u[n] - u[n-3]$$



$$h_4[n] = -\delta[n-2]$$



次に, $h[n]$ について考える.

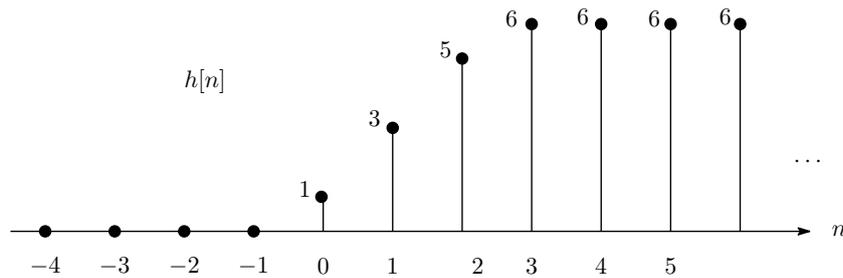
$$h_3[n] * h_4[n] = (n+1)u[n] * (-\delta[n-2]) = -(n-1)u[n-2]$$

$$h_2[n] + h_3[n] * h_4[n] = (n+1)u[n] - (n-1)u[n-2] = 2u[n] - \delta[n]$$

であり, また, $h_1[n] = u[n] - u[n-3] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$ であることから,

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) * (2u[n] - \delta[n]) \\ &= 2u[n] + 2u[n-1] + 2u[n-2] - \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] \\ &= \delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 6u[n-3] \end{aligned}$$

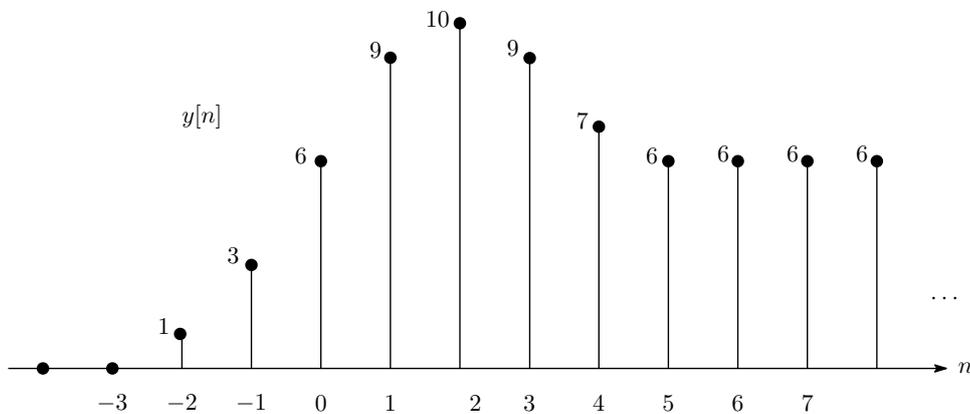
と求まる. これを図示すると次のようになる.



(iii) この $x[n]$ は $x[n] = \delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]$ と表せる. 従って,

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] &= (\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n+2]) * (\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 6u[n-3]) \\ &= 6\delta[n] + 3\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 3\delta[n-3] - 5\delta[n-4] \\ &\quad + \delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 6u[n-3] - 6u[n-5] + 6u[n-1] \end{aligned}$$

となる. これを図示すると次のようになる.



(8) (i) 線形時不変システムを縦続接続したとき, 全体のインパルス応答は個々のシステムのインパルス応答の畳込みにより与えられる. 従って,

$$\begin{aligned} h(t) = h_1(t) * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= 2e^{-t} \left[\int_0^t e^{-\tau}d\tau \right] u(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

となる.

(ii) 問い (i) で求めた $h(t)$ は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau &= 2 \int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) d\tau \\ &= 2 \left[\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-2\tau} d\tau \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 < \infty \end{aligned}$$

を満たす。すなわち、この $h(t)$ は絶対積分可能であり、全体システムは BIBO 安定である。

(9) (i) まず A) のシステムについて、

$$\begin{aligned} L[ax_1[n] + bx_2[n]] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} \{ax_1[k] + bx_2[k]\} \\ &= a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k] + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = aL[x_1[n]] + bL[x_2[n]] \end{aligned}$$

より、線形。また、 $x'[n] = x[n - N]$ に対する出力は

$$L[x'[n]] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x'[k] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k - N] = \sum_{l=(n-N)-n_0}^{(n-N)+n_0} x[l] = y[n - N]$$

であることから、時不変 ($l = k - N$ として変数変換)。同様に、A) のシステムについて、

$$\begin{aligned} L[ax_1[n] + bx_2[n]] &= \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} \{ax_1[k+1] + bx_2[k+1]\} \\ &= a \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x_1[k+1] + b \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x_2[k+1] \\ &= aL[x_1[n]] + bL[x_2[n]] \end{aligned}$$

より、線形。また、 $x'[n] = x[n - N]$ に対する出力は

$$\begin{aligned} L[x'[n]] &= \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x'[k+1] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x[k+1 - N] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{n-N} 2^{l+N-n} x[l+1] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{n-N} 2^{l-(n-N)} x[l+1] = y[n - N] \end{aligned}$$

であることから、時不変 ($l = k - N$ として変数変換)。

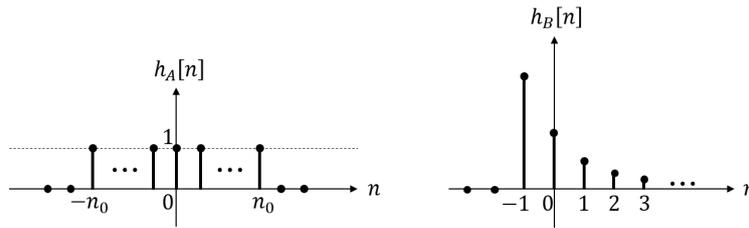
(ii) A) のシステムについて、

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[n+n_0-k] - u[n-n_0-1-k])x[k] \\ &= (u[n+n_0] - u[n-n_0-1]) * x[n] \end{aligned}$$

より、インパルス応答は $h_A[n] = u[n+n_0] - u[n-n_0-1]$ 。一方、B) のシステムについて、

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x[k+1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k] 2^{k-n} x[k+1] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} u[n-(l-1)] 2^{l-1-n} x[l] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[(n+1)-l] 2^{-((n+1)-l)} x[l] = (u[n+1] 2^{-(n+1)}) * x[n] \end{aligned}$$

より, インパルス応答は $h_B[n] = u[n+1]2^{-(n+1)}$. これらを図示すると次の通り.



(iii) まず因果性について, $n_0 > 0$ であることから $h_A[-1] = h_B[-1] = 1$ であり, 従って A), B) とともに非因果的. 一方, BIBO 安定性について,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_A[n]| = \sum_{n=-n_0}^{n_0} 1 = 2n_0 + 1 < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_B[n]| = \sum_{n=-1}^{\infty} 2^{-n-1} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2 < \infty$$

より, A), B) とともに BIBO 安定.

(iv) システム A), B) のステップ応答をそれぞれ $s_A[n], s_B[n]$ とすると,

$$s_A[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_A[k] = \begin{cases} 0 & (n < -n_0) \\ n + n_0 + 1 & (-n_0 \leq n \leq n_0) \\ 2n_0 + 1 & (n_0 < n) \end{cases}$$

および

$$s_B[n] = \sum_{k=-\infty}^n h_B[k] = \frac{1-2^{-2-n}}{1-2^{-1}} u[n+1] = 2u[n+1](1-2^{-2-n})$$

と求まる. $s_A[n]$ は, $u[n]$ を用いて表すと, $s_A[n] = (n + n_0 + 1)(u[n + n_0] - u[n - n_0 - 1])$.

(10) (i) 入力信号 $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) に対するシステム L の出力を

$$y_i(t) = L[x_i(t)] = \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} x_i(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau$$

とするとき, 任意の定数 α, β について

$$\begin{aligned} L[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] &= \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} \{\alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau)\} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau \\ &= \alpha \cdot \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} x_1(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau \\ &\quad + \beta \cdot \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} x_2(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{aligned}$$

が成り立つので, L は線形. また, L に $x'(t) = x(t-t_0)$ を入力した時の出力は, 任意の t_0 について

$$\begin{aligned} L[x(t-t_0)] &= L[x'(t)] = \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} x'(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{1}{b} \int_{t-a-b}^{t-a+b} x(\tau-t_0) \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{1}{b} \int_{(t-a-b)-t_0}^{(t-a+b)-t_0} x(\tau') \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a-(\tau'+t_0))\right) d\tau' \\ &= \frac{1}{b} \int_{(t-t_0)-a-b}^{(t-t_0)-a+b} x(\tau') \cos\left(\frac{\pi}{2b}((t-t_0)-a-\tau')\right) d\tau' = y(t-t_0) \end{aligned}$$

となる ($\tau' = \tau - t_0$ として変数変換) ので, L は時不変.

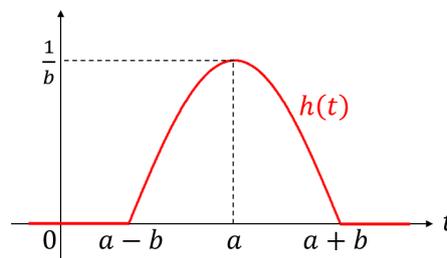
(ii) $\tau' = t - \tau$ として積分変数を変換すると、問題文の式は

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{b} \int_{t-(t-a-b)}^{t-(t-a+b)} x(t-\tau') \cos\left(\frac{\pi}{2b}(\tau'-a)\right) d\tau' \\ &= \frac{1}{b} \int_{a-b}^{a+b} x(t-\tau') \cos\left(\frac{\pi}{2b}(\tau'-a)\right) d\tau' \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau') \cos\left(\frac{\pi}{2b}(\tau'-a)\right) [u(\tau'-(a-b)) - u(\tau'-(a+b))] d\tau' \\ &= \frac{1}{b} x(t) * \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a)\right) [u(t-(a-b)) - u(t-(a+b))] \\ &= x(t) * \frac{1}{b} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a)\right) [u(t-(a-b)) - u(t-(a+b))] \end{aligned}$$

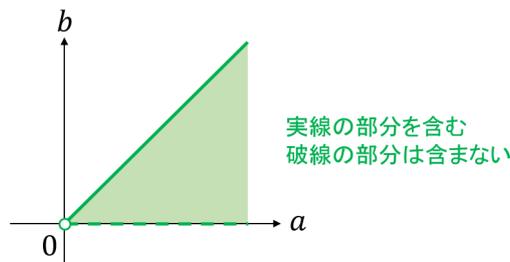
と変形できる ($b > 0$ であることに注意)。以上より、 L のインパルス応答 $h(t)$ は

$$h(t) = \frac{1}{b} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a)\right) [u(t-(a-b)) - u(t-(a+b))]$$

と求まる。これを図示すると次のようになる。



(iii) 線形時不変な連続時間信号処理システムが因果的であることの必要十分条件は、そのインパルス応答 $h(t)$ が $\forall t < 0, h(t) = 0$ を満たすことである。本問においては、問い(ii)で示した $h(t)$ のグラフから、 $a-b \geq 0$ であれば上述の条件が満たされる。問題文より $b > 0$ であるから、結局、 $a \geq b > 0$ であれば L は因果的となる。よって、求める a, b の範囲は次の通り。



(iv) 本問の $h(t)$ は $a-b \leq t \leq a+b$ において $h(t) \geq 0$ 、それ以外の範囲で $h(t) = 0$ であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \frac{1}{b} \int_{a-b}^{a+b} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a)\right) dt$$

と計算できる。ここで、 $s = \frac{\pi}{2b}(t-a)$ において積分変数を変換すると、

$$\frac{1}{b} \int_{a-b}^{a+b} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(t-a)\right) dt = \frac{1}{b} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) \frac{2b}{\pi} ds = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) ds = \frac{4}{\pi}$$

となり、結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \frac{4}{\pi} < \infty$$

が成り立つ。すなわち、 $h(t)$ は絶対積分可能であり、故に L は BIBO 安定である。

(11) (i) システム L_1 に $x_1[n]$, $x_2[n]$ を入力したときの出力をそれぞれ

$$y_1[n] = L_1[x_1[n]] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_1[k], \quad y_2[n] = L_1[x_2[n]] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_2[k]$$

とおく. このとき, $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ (α, β は任意の定数) に対する L_1 の出力は

$$\begin{aligned} y[n] = L_1[x[n]] &= \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} \{\alpha x_1[k] + \beta x_2[k]\} \\ &= \alpha \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_1[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_2[k] \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = \alpha L_1[x_1[n]] + \beta L_1[x_2[n]] \end{aligned}$$

となるので, L_1 は線形. また, $x'[n] = x[n-m]$ (m は任意の整数) に対する L_1 の出力は

$$\begin{aligned} y'[n] = L_1[x'[n]] &= \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x'[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k-m] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{n-n_0-m} x[l] = \sum_{l=-\infty}^{(n-m)-n_0} x[l] = y[n-m] \end{aligned}$$

となる ($l = k - m$ として変数変換) ので, L_1 は時不変.

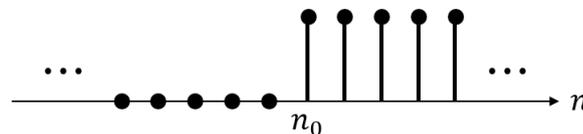
(ii) 与式に $x[n] = \delta[n]$ を代入することにより

$$h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} \delta[k]$$

を得る. 上式において, $n - n_0 < 0$ すなわち $n < n_0$ のとき, 総和の計算範囲に $k = 0$ が含まれないため, 任意の k について $\delta[k] = 0$ となり, 従って $h_1[n] = 0$. 一方, $n - n_0 \geq 0$ すなわち $n \geq n_0$ のとき, 総和の計算範囲に $k = 0$ が含まれ, そのときのみ $\delta[k] \neq 0$ となるため, $h_1[n] = \delta[0] = 1$. 以上をまとめると,

$$h_1[n] = u[n - n_0] = \begin{cases} 0 & (n < n_0) \\ 1 & (n \geq n_0) \end{cases}$$

となる. これを図示すると次のようになる.



(iii) インパルス応答の絶対総和が有限の値に収束する場合, そのシステムは BIBO 安定である. 本問の $h_2[n]$ についてこれを求めると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-an} u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a})^n$$

となる. これは初項 1, 公比 $e^{-a} < 1$ の等比級数 (問題文より $a > 0$) であるから,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a})^n = \frac{1}{1 - e^{-a}} < \infty$$

となり, 絶対総和が有限の値に収束することが分かる. 従って L_2 は BIBO 安定である.

- (iv) 線形時不変システムを縦続接続したとき、全体のインパルス応答は個々のシステムのインパルス応答の畳込みにより与えられる。従って、

$$h[n] = h_2[n] * h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[n-k]h_1[k]$$

という関係が満たされる。この関係式に従って $h[n]$ を求めると

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-a(n-k)}u[n-k]u[k-n_0] = e^{-an} \sum_{k=n_0}^{\infty} e^{ak}u[n-k]$$

を得る。 $n < n_0$ のとき、 $k \geq n_0$ の範囲では任意の k について $u[n-k] = 0$ となることから、 $h[n] = 0$ となる。一方、 $n \geq n_0$ のとき、 $n_0 \leq k \leq n$ の範囲では $u[n-k] = 1$ 、それ以外の範囲では $u[n-k] = 0$ であるため、

$$h[n] = e^{-an} \sum_{k=n_0}^n e^{ak} = e^{-an} \frac{e^{an_0}(1 - e^{a(n-n_0+1)})}{1 - e^a} = \frac{e^{-a(n-n_0)} - e^a}{1 - e^a}$$

となる。以上をまとめると、

$$h[n] = \frac{e^{-a(n-n_0)} - e^a}{1 - e^a} u[n - n_0]$$

- (v) システム L が因果的となるためには、インパルス応答 $h[n]$ が $n < 0$ において $h[n] = 0$ である必要がある。問い (iv) で求めた $h[n]$ は、 $n < n_0$ のとき、かつそのときのみ $h[n] = 0$ であることから、 $n_0 \geq 0$ であれば上記の条件が満たされる。従って、 L が因果的となるための条件は $n_0 \geq 0$ 。

第4章 演習問題 解答

- (1) (i) 以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t-\tau)g(\tau)d\tau &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-\tau)} \right] g(\tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(\tau) e^{jn\omega_0(t-\tau)} d\tau \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

- (ii) 以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t+\tau)\overline{f(\tau)}d\tau &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t+\tau)} \right] \overline{f(\tau)}d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \overline{f(\tau)} e^{jn\omega_0\tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{\left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right]} e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_n} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

- (iii) $f(t)$, $g(t)$ が共に基本周期 T_0 の周期信号であることから、 $f(t) = f(t+T_0)$ かつ $g(t) = g(t+T_0)$ であり、従って

$$x(t+T_0) = f(t+T_0)g(t+T_0) = f(t)g(t) = x(t)$$

が導かれる。上式より、 $x(t)$ もまた周期 T_0 の周期信号である（ただし基本周期が T_0 とは限らない）。

(iv) 以下の通り.

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)g(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \right] e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k c_{n-k} \end{aligned}$$

(2) (i) 以下の通り.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

(ii) $f(t) = e^{-at}u(t)$ とおくと, $e^{-a|t|} = f(t) + f(-t)$. また, フーリエ変換の性質より, $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ならば $f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$ であるから,

$$e^{-a|t|} = f(t) + f(-t) \Leftrightarrow F(\omega) + F(-\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

(3) $x(t)$ は周期 T の周期信号であるため,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{ただし } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

のようにフーリエ級数に展開でき, さらに, フーリエ変換の線形性より,

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}]$$

が成り立つ. ここで, $2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$ を逆フーリエ変換することにより,

$$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega - n\omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{jn\omega_0 t}$$

であること, すなわち $\mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$ であることが分かる. 以上より,

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \{2\pi\delta(\omega - n\omega_0)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

が導かれる.

(4) パーシバルの等式より, 信号 $y(t)$ のエネルギーは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

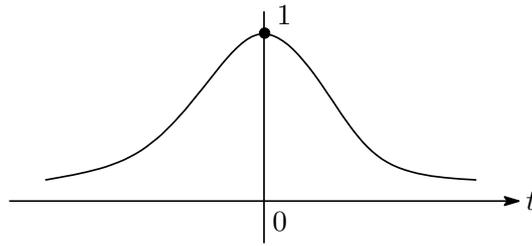
で与えられる. ここで, $y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ より

$$Y(\omega) = (j\omega)^2 X(\omega) = -\omega^2 X(\omega)$$

であるので,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 X^2(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \omega^4 d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\omega^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5\pi} \end{aligned}$$

(5) (i) 下図の通り.



(ii) $\frac{d}{d\omega}\{e^{-(at^2+j\omega t)}\} = -jte^{-(at^2+j\omega t)}$ であることから, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+j\omega t)} dt$ の両辺を ω で微分することにより

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)e^{-(at^2+j\omega t)} dt = -j \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt$$

を得る. ここで, 部分積分 $\int f'(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)dt$ より,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a}e^{-at^2}\right)' e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2a}e^{-at^2} e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a}e^{-at^2}\right) (-j\omega) e^{-j\omega t} dt \\ &= (0-0) - j\frac{\omega}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = -j\frac{\omega}{2a} X(\omega) \end{aligned}$$

である. 以上より,

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = (-j)^2 \frac{\omega}{2a} X(\omega) = -\frac{\omega}{2a} X(\omega)$$

(iii) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+j\omega t)} dt$ に $\omega = 0$ を代入し,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \frac{1}{\sqrt{a}} ds = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を得る ($\sqrt{at} = s$ として変数変換).

(iv) $\lambda = X(\omega)$ とおくと, 問い (ii) の関係式は

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a} \lambda \iff \frac{1}{\lambda} d\lambda = -\frac{\omega}{2a} d\omega$$

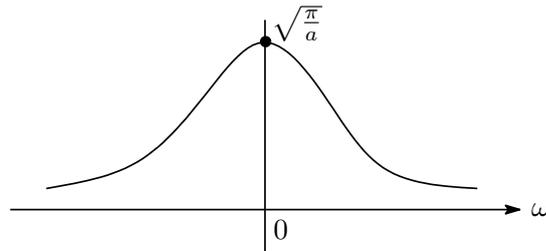
と表せる. これは変数分離型の微分方程式であり, その一般解は

$$\log \lambda = -\frac{\omega^2}{4a} + C \iff X(\omega) = \lambda = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} e^C$$

と求まる. ここで, 問い (iii) より $X(0) = e^C = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ でなければならないので, 結局

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

となる. これを図示すると次のようになる.



(6) (i) 問題文の条件より,

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \diamond y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\tau-t)} y(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\tau-t)} y(\tau) e^{-j\omega(\tau-t)} e^{-j\omega\tau} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\tau-t)} e^{-j\omega(\tau-t)} dt \right] y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t')} e^{-j\omega t'} dt' \right] y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \overline{X(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \overline{X(\omega)} Y(\omega) \end{aligned}$$

となる ($t' = \tau - t$ として変数変換).

(ii) 【交換則】

問い(i)より, $\mathcal{F}[x(t) \diamond y(t)] = \overline{X(\omega)} Y(\omega)$ である一方, $\mathcal{F}[y(t) \diamond x(t)] = \overline{Y(\omega)} X(\omega) = X(\omega) \overline{Y(\omega)}$ であることが分かる. 一般に $\overline{X(\omega)} Y(\omega) \neq X(\omega) \overline{Y(\omega)}$ であることから,

$$\mathcal{F}^{-1} [\overline{X(\omega)} Y(\omega)] \neq \mathcal{F}^{-1} [X(\omega) \overline{Y(\omega)}] \iff x(t) \diamond y(t) \neq y(t) \diamond x(t)$$

である. よって, 交換則は成り立たない.

【分配則】

$\mathcal{F}[y_i(t)] = Y_i(\omega)$ ($i = 1, 2$) とする. 問い(i)の結果およびフーリエ変換の線形性より,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \diamond \{y_1(t) + y_2(t)\}] &= \overline{\mathcal{F}[x(t)]} \mathcal{F}[y_1(t) + y_2(t)] \\ &= \overline{X(\omega)} \{\mathcal{F}[y_1(t)] + \mathcal{F}[y_2(t)]\} \\ &= \overline{X(\omega)} \mathcal{F}[y_1(t)] + \overline{X(\omega)} \mathcal{F}[y_2(t)] = \overline{X(\omega)} Y_1(\omega) + \overline{X(\omega)} Y_2(\omega) \end{aligned}$$

であり, 従って,

$$\begin{aligned} x(t) \diamond \{y_1(t) + y_2(t)\} &= \mathcal{F}^{-1} [\overline{X(\omega)} Y_1(\omega) + \overline{X(\omega)} Y_2(\omega)] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [\overline{X(\omega)} Y_1(\omega)] + \mathcal{F}^{-1} [\overline{X(\omega)} Y_2(\omega)] \\ &= x(t) \diamond y_1(t) + x(t) \diamond y_2(t) \end{aligned}$$

となる (逆フーリエ変換の線形性を利用). よって, 分配則は成り立つ.

【結合則】

$\mathcal{F}[z(t)] = Z(\omega)$ とする。問い (i) の結果より、

$$\mathcal{F}\{[x(t) \diamond y(t)] \diamond z(t)\} = \overline{\mathcal{F}[x(t) \diamond y(t)]} \mathcal{F}[z(t)] = \overline{X(\omega)Y(\omega)} Z(\omega) = X(\omega) \overline{Y(\omega)} Z(\omega)$$

である一方、

$$\mathcal{F}[x(t) \diamond \{y(t) \diamond z(t)\}] = \overline{\mathcal{F}[x(t)]} \mathcal{F}[y(t) \diamond z(t)] = \overline{X(\omega)} \{ \overline{Y(\omega)} Z(\omega) \} = \overline{X(\omega)} \overline{Y(\omega)} Z(\omega)$$

であることが分かる。従って、一般に

$$X(\omega) \overline{Y(\omega)} Z(\omega) \neq \overline{X(\omega)} \overline{Y(\omega)} Z(\omega) \iff \mathcal{F}\{[x(t) \diamond y(t)] \diamond z(t)\} \neq \mathcal{F}[x(t) \diamond \{y(t) \diamond z(t)\}]$$

である。よって、結合則は成り立たない。

(7) (i) $r_{pp}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)p(t)dt$ に対し、

$$r_{pp}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t+\tau)p(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(s)p(s-\tau)ds = r_{pp}(\tau)$$

が成り立つ ($t+\tau=s$ として変数変換)。故に $r_{pp}(\tau)$ は偶関数である。

(ii) 次の通り。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[r_{pp}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{pp}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau)p(t)dt \right] e^{-j\omega(\tau-t)} e^{-j\omega t} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau) e^{-j\omega(\tau-t)} d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \left[\int_{\infty}^{-\infty} p(s) e^{-j\omega(-s)} (-ds) \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(s) e^{-j\omega s} ds \right]} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \overline{P(\omega)} e^{-j\omega t} dt = \overline{P(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt = \overline{P(\omega)} P(\omega) = |P(\omega)|^2 \end{aligned}$$

但し、 $t-\tau=s$ として積分変数を変換した。また、 $\overline{p(s)} = p(s)$ であること (p は実信号) に注意。

(iii) 問い (ii) より、 $r_{xx}(\tau) = \delta(\tau)$ となるような信号 $x(t)$ のエネルギースペクトルは、任意の ω に対し

$$|X(\omega)|^2 = \mathcal{F}[r_{xx}(\tau)] = \mathcal{F}[\delta(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^0 = 1$$

を満たすことが分かる。このような信号は白色雑音と呼ばれる。その性質は、すべての周波数成分を持ち、かつ各周波数でのエネルギースペクトルが同じ大きさを持つ、というものである。

(iv) 出力 $y(t)$ が入力 $x(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の畳込みとなることに注意して、

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)x(t-\alpha)dt \right] h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(s+\alpha-\tau)x(s)ds \right] h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha = r_{xx}(\tau) * h(\tau) = \delta(\tau) * h(\tau) = h(\tau) \end{aligned}$$

を得る ($t - \alpha = s$ として変数変換) .

(8) (i) $q(t) = h(t) * x(t)$ より,

$$q(t + T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + T_0 - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3)$$

である. ここで, $h(t)$ は周期 T_0 の周期信号であるから, 任意の t について

$$h(t - \tau) = h(t - \tau + T_0) = h(t + T_0 - \tau) \quad (4)$$

が成り立つ. 式 (3)(4) より, 任意の t について

$$q(t + T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + T_0 - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = q(t)$$

となる. 故に $q(t)$ は周期 T_0 の周期信号である.

(ii) フーリエ係数の定義式に従って, Q_k は

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} q(t)e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \right] e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \{x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}\} \{h(t - \tau)e^{-jk\omega_0(t - \tau)}\} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau} \left[\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} h(t - \tau)e^{-jk\omega_0(t - \tau)} dt \right] d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

のように計算される. 内側の定積分に関して, $t - \tau = s$ として積分変数を変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} h(t - \tau)e^{-jk\omega_0(t - \tau)} dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau}^{T_0 - \tau} h(s)e^{-jk\omega_0 s} ds \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} h(s)e^{-jk\omega_0 s} ds = H_k \end{aligned} \quad (6)$$

となる. 式 (5)(6) より

$$Q_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau} H_k d\tau = H_k \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(k\omega_0)\tau} d\tau = H_k X(k\omega_0)$$

を得る.

(iii) 以下の通り.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k e^{jk\omega_0 t} \right] x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k x(t)e^{-j(\omega - k\omega_0)t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H_k x(t)e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[H_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k X(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

- (iv) この条件下では、 $h(t)$ は単位インパルス信号 $\delta(t)$ を T_0 ずつずらしながら重ね合わせたパルス列となる。従って、 $h(t)$ は δ および T_0 を用いて

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

と表現できる。

- (v) $h(t)$ の 1 周期分として $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ に着目すると、

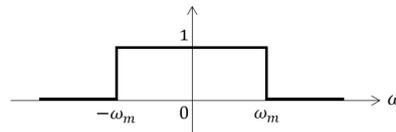
$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot e^0 \\ &= \frac{1}{T_0} \quad \left(= \frac{\omega_0}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

- (vi) 問題文の $X(\omega)$ を式で表すと

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < -\omega_m) \\ 1 & (-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m) \\ 0 & (\omega > \omega_m) \end{cases}$$

であり、そのグラフは $\omega = 0$ を中心とする幅 $2\omega_m$ 、高さ 1 の矩形となる（下図参照）。



一方、問い (iii)(v) の結果から、 $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

となる。以上のことから、 $Y(\omega)$ は幅 $2\omega_m$ 、高さ $\frac{1}{T_0}$ の矩形を ω_0 ずつずらし重ね合わせたものであると分かる。従って、(a) $\omega_0 = 3\omega_m$ および (b) $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega_m$ の場合における $Y(\omega)$ のグラフはそれぞれ下図のようになる。

- (9) 題意のパルス列は、周期の T_0 のパルス列から周期 $3T_0$ のパルス列を減算したものと考えられる。これを $d(t)$ とすると、

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3nT_0)$$

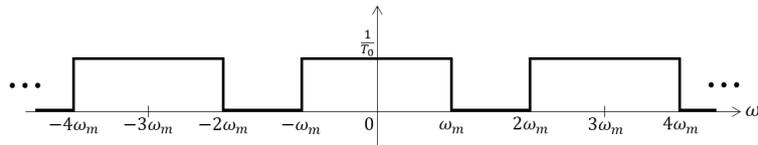
であり、従って

$$x_d(t) = d(t)x(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) - x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3nT_0)$$

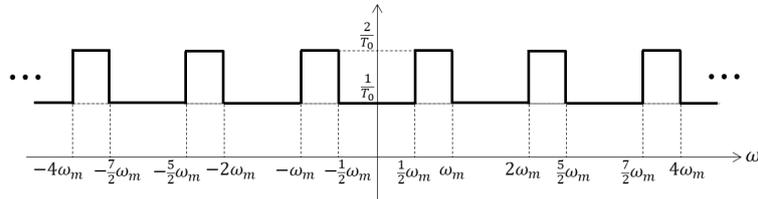
となる。上式の両辺をフーリエ変換して

$$X_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) - \frac{1}{3T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{n\omega_0}{3}\right) \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

を得る。



(a) $\omega_0 = 3\omega_m$ の場合における $Y(\omega)$ のグラフ



(b) $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega_m$ の場合における $Y(\omega)$ のグラフ

第5章 演習問題 解答

(1) (i) $x(t) = \cos(100\pi t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$ より, $x(t)$ の周波数 F は 50 [Hz] である. よって, ナイキスト周波数は $50 \times 2 = 100$ [Hz].

(ii) $f_s = 200$ [Hz] で $x(t)$ をサンプリングして得られる信号を $x_1[n]$ とすると,

$$x_1[n] = \cos\left(100\pi \frac{n}{200}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(iii) $x_2[n]$ は

$$x_2[n] = \cos\left(100\pi \frac{n}{75}\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) = \cos\left(2\pi n - \frac{2}{3}\pi n\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot n\right)$$

と表せる. これは正規化周波数で言うと $\frac{f}{f_s} = F = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ の正弦波に相当する. サンプリング周波数 $f_s = 75$ [Hz] の下で上式を満たすのは, $f = \frac{1}{3}f_s = \frac{1}{3} \times 75 = 25$ [Hz].

(2) (i) $x(t) = \cos(15t)$ より, $x[n] = x(nT_s) = \cos(15nT_s)$ である. これが周期的となるためには, 基本周期を N_0 (N_0 は自然数) として

$$\cos\left(15(n + N_0)T_s\right) = \cos(15nT_s + 15N_0T_s) = \cos(15nT_s)$$

が恒等的に成り立つ必要がある. これが満たされるのは

$$15N_0T_s = 2\pi m$$

のときであり, そのときのサンプリング間隔 T_s は

$$T_s = \frac{2\pi m}{15N_0} \tag{7}$$

で与えられる. ここで, m と N_0 は任意の自然数である.

(ii) ナイキスト間隔とは, エイリアシングが生じない最大のサンプリング間隔のことであり, ナイキストレートの逆数である. いま,

$$x(t) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{15}{2\pi} t\right)$$

より, $x(t)$ の周波数は $\frac{15}{2\pi}$ であり, ナイキストレートは $\frac{15}{\pi}$ である. よって, ナイキスト間隔は $\frac{\pi}{15}$.

(iii) 式 (7) において $T_s = 0.1\pi = \pi/10$ とすると,

$$\frac{\pi}{10} = \frac{2\pi m}{15N_0} \iff N_0 = \frac{4}{3}m$$

となる. N_0 が自然数となるような最小の m は $m = 3$ であり, そのとき $N_0 = 4$ であるから, $x[n] = x(0.1\pi n)$ の基本周期は $N_0 = 4$ である.

(iv) $x[n]$ は

$$x[n] = \cos(15 \cdot 0.1\pi n) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n\right) = \cos\left(2\pi n - \frac{1}{2}\pi n\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot n\right)$$

と表せる. これは正規化周波数で言うと $\frac{f}{f_s} = F = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ の正弦波に相当する. サンプル周波数 $f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{0.1\pi} = \frac{10}{\pi}$ の下で上式を満たすのは, $f = \frac{1}{4}f_s = \frac{5}{2\pi}$. これを満たす連続時間正弦波は

$$\cos\left(2\pi \cdot \frac{5}{2\pi} \cdot t\right) = \cos(5t)$$

(3) (i) $x(t) = e^{-j(400\pi t)} = e^{j(2\pi(-200)t)}$ より, 周波数は -200 [Hz].

(ii) サンプル周波数が f_s [Hz] のとき (ただし $f_s > 0$), エイリアシングを生じることなくサンプリング可能な信号の周波数の範囲は $\left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$ である. 従って, 本問の $x(t)$ をエイリアシングなしにサンプリングするためには, $-\frac{f_s}{2} \leq -200 \leq \frac{f_s}{2}$ すなわち $f_s \geq 400$ でなければならない. ここで, サンプル周波数 T は f_s の逆数 ($T = \frac{1}{f_s}$) であるから, 求める条件は

$$f_s \geq 400 \iff 0 < T \leq \frac{1}{400} = 0.0025$$

となる.

(iii) $x[n] = x\left(\frac{n}{f_s}\right)$ より, $f_s = 90$ のとき

$$x[n] = e^{-j(400\pi \frac{n}{90})} = e^{-j(\frac{40}{9}\pi n)} = e^{j(-4\pi n)} e^{j(-\frac{4}{9}\pi n)} = e^{j(2\pi(-\frac{2}{9})n)}$$

となる. よって, $F = -\frac{2}{9}$.

(iv) $x[n] = x\left(\frac{n}{f_s}\right) = e^{j(-\frac{400}{f_s}\pi n)}$ より, これが $e^{j(\frac{2}{3}\pi n)}$ と一致するための条件は,

$$-\frac{400}{f_s}\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m \iff f_s = -\frac{600}{1+3m}$$

が何らかの整数 m に対して成り立つことである. ここで, $m \geq 0$ のときは $f_s < 0$ となり問題文の条件 $f_s \geq 60$ を満たさない. 同じく, $m \leq -4$ のときは $f_s < \frac{600}{11} < 60$ となり条件を満たさない. 条件に合致するのは $m = -1, -2, -3$ のときであり, それぞれから

$$f_s = 300, 120, 75$$

が導かれる.

(4) (i) $x(t)$ を構成する周波数成分のうち最も高周波なものは

$$4\cos(12000\pi t) = 4\cos(2\pi \cdot 6000 \cdot t)$$

であり, その周波数は 6000 [Hz] = 6 [kHz]. よって, エイリアシングが生じない最小のサンプリング周波数 (ナイキストレート) は $2 \times 6 = 12$ [kHz].

(ii) $f_s = 5$ [kHz] = 5000 [Hz] より,

$$\begin{aligned} x[n] &= x\left(\frac{n}{f_s}\right) = 2 \cos\left(2000\pi \frac{n}{5000}\right) + 3 \sin\left(6000\pi \frac{n}{5000}\right) + 4 \cos\left(12000\pi \frac{n}{5000}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 3 \sin\left(\frac{6}{5}\pi n\right) + 4 \cos\left(\frac{12}{5}\pi n\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 3 \sin\left(2\pi n - \frac{4}{5}\pi n\right) + 4 \cos\left(2\pi n + \frac{2}{5}\pi n\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) - 3 \sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right) + 4 \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) \\ &= 6 \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) - 3 \sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right) \end{aligned}$$

(iii) 問い(ii)で求めた式に含まれる周波数成分は何れも正規化周波数 1/2 未満の成分であるため、これに $n = f_s t = 5000t$ を代入した

$$x'(t) = 6 \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot 5000t\right) - 3 \sin\left(\frac{4}{5}\pi \cdot 5000t\right) = 6 \cos(2000\pi t) - 3 \sin(4000\pi t)$$

がサンプリング定理により復元される。これは明らかに元の信号 $x(t)$ とは異なる。この歪みはエイリアシングによって引き起こされたものであり、アンダーサンプリングによるものである。

(5) (i) オイラーの公式より

$$\sin(\omega_c t) = \frac{1}{2j} \{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\} = -\frac{j}{2} \{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\}$$

と表せる。この式とフーリエ変換の線形性、および問い(2)の結果から、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(\omega_c t)] &= -\frac{j}{2} \{\mathcal{F}[e^{j\omega_c t}] - \mathcal{F}[e^{-j\omega_c t}]\} \\ &= -\frac{j}{2} \{2\pi\delta(\omega - \omega_c) - 2\pi\delta(\omega + \omega_c)\} = j\pi \{\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)\} \end{aligned}$$

(ii) $Q(\omega)$, $R(\omega)$ はそれぞれ

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt, \quad R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt$$

と表される。また、 $r(t)$ は $R(\omega)$ を用いて

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1}[R(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

と表される。以上より、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q(t)r(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t)r(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega')e^{j\omega' t} d\omega' \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t)R(\omega')e^{-j(\omega - \omega')t} d\omega' dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-j(\omega - \omega')t} dt \right\} R(\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega - \omega')R(\omega') d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} Q(\omega) * R(\omega) \end{aligned}$$

となり、 $g(t)r(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} Q(\omega) * R(\omega)$ が導かれる。

(iii) 問い (i)(ii) の結果より

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) \sin(\omega_c t)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\sin(\omega_c t)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [j\pi \{\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)\}] \\
 &= \frac{j}{2} \{X(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) - X(\omega) * \delta(\omega - \omega_c)\} \\
 &= \frac{j}{2} \{X(\omega + \omega_c) - X(\omega - \omega_c)\}
 \end{aligned}$$

が導かれる。 $x(t)$ は帯域制限信号であり、その最大角周波数 ω_m は ω_c より小さいことから、 $X(\omega + \omega_c)$ と $X(\omega - \omega_c)$ は互いに重ならず、従って

$$|Y(\omega)| = \left| \frac{j}{2} \right| |X(\omega + \omega_c) - X(\omega - \omega_c)| = \frac{1}{2} \{|X(\omega + \omega_c)| + |X(\omega - \omega_c)|\}$$

となる。ここで、 $x(t)$ は実信号であることから $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ であり、従って

$$|X(\omega)| = \begin{cases} 2 & (0 \leq \omega \leq \omega_m) \\ 0 & (\omega > \omega_m) \end{cases}$$

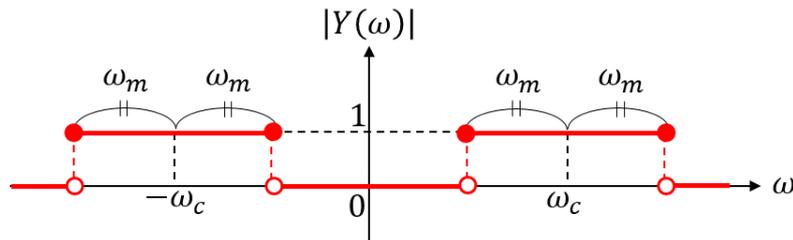
のとき

$$|X(\omega)| = \begin{cases} 2 & (|\omega| \leq \omega_m) \\ 0 & (|\omega| > \omega_m) \end{cases}$$

が満たされる。よって $|Y(\omega)|$ は

$$|Y(\omega)| = \begin{cases} 1 & (\omega_c - \omega_m \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる。これを図示すると下図のようになる。



(iv) 問い (iii) の結果からも分かる通り、 $Y(\omega)$ は $|\omega| > \omega_c + \omega_m$ において $Y(\omega) = 0$ を満たす。すなわち $y(t)$ は帯域制限信号となり、その最高周波数は

$$\frac{\omega_c + \omega_m}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

となる。従って、 $y(t)$ を一様サンプリングした際にエイリアシングが生じないためには、サンプリング周波数 f_s を上記周波数の2倍以上に設定しなければならない。すなわち、満たされるべき条件（ナイキスト条件）は

$$f_s \geq 2 \cdot \frac{\omega_c + \omega_m}{2\pi} = \frac{\omega_c + \omega_m}{\pi}$$

第6章 演習問題 解答

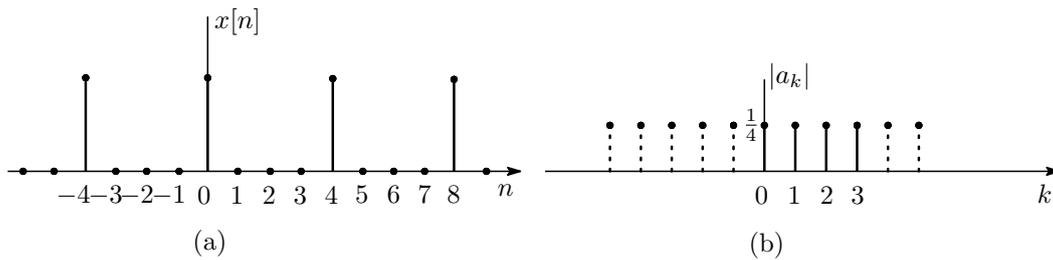
(1) $x[n]$ は下図 (a) のようになる。これは信号 $\{1, 0, 0, 0\}$ を周期 4 で周期的拡張したものであるので、 $x[n]$ は

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 a_k e^{jk(2\pi/4)n} = \sum_{k=0}^3 a_k e^{jk(\pi/2)n}$$

のように離散フーリエ級数に展開できる。そのときの係数 a_k は、 $x[0] = 1$ および $x[1] = x[2] = x[3] = 0$ であることから、

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jk(2\pi/4)n} = \frac{1}{4} x[0] = \frac{1}{4}$$

となる (任意の k について $a_k = 1/4$)。下図 (b) はこれを図示したものである。



(2) この $x[n]$ は

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n]$$

とおける。ここで、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

であり、また、DTFT の時間反転に関する性質 $x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega)$ より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}}$$

である。よって、DTFT の線形性より、

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}} - 1 \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega})} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \cos \Omega} = \frac{3}{5 - 4 \cos \Omega} \end{aligned}$$

(3) (i) 所与の $X(\omega)$ を逆 DTFT の定義式に代入し、

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega$$

を得る。 $n = 0$ のとき、

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W d\Omega = \frac{1}{2\pi} [\Omega]_{-W}^W = \frac{W}{\pi}$$

である。一方、 $n \neq 0$ のとき、

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \right]_{-W}^W = \frac{1}{\pi n} \frac{e^{jWn} - e^{-jWn}}{2j} = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$

である。上式の $n \rightarrow 0$ における極限は $\frac{W}{\pi}$ であるので、便宜上 $n = 0$ の場合もまとめてしまうと、

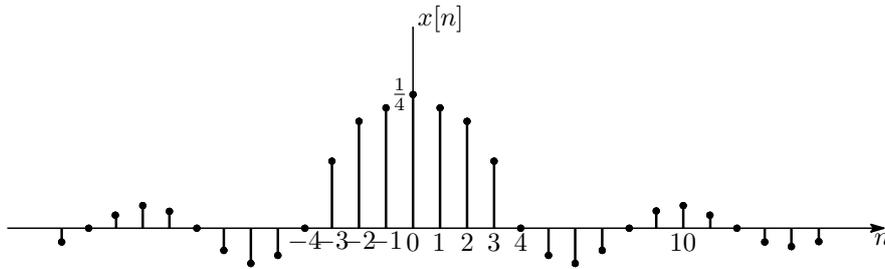
$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

となる。

(ii) $W = \pi/4$ のとき、

$$x[n] = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

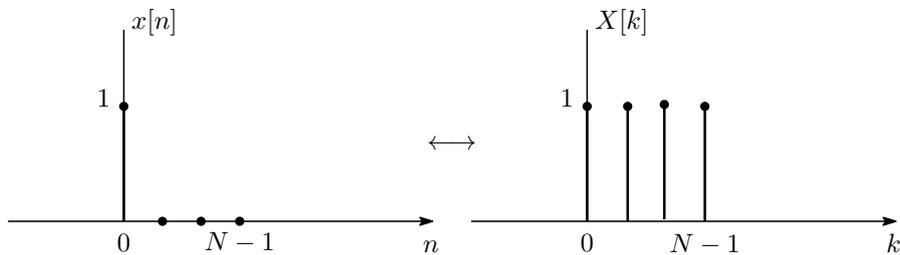
であり、これを図示すると次のようになる。



(4) (i) $x[n] = \delta[n]$ を DFT の定義式に代入し

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

を得る。このときの $x[n]$ および $X[k]$ を図示すると次のようになる。



(ii) $x[n] = u[n] - u[n - N]$ は、 N 点信号としてこれを捉えた場合には、任意の $n = 0, 1, \dots, N-1$ に対し $x[n] = 1$ となる。よって、

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn}$$

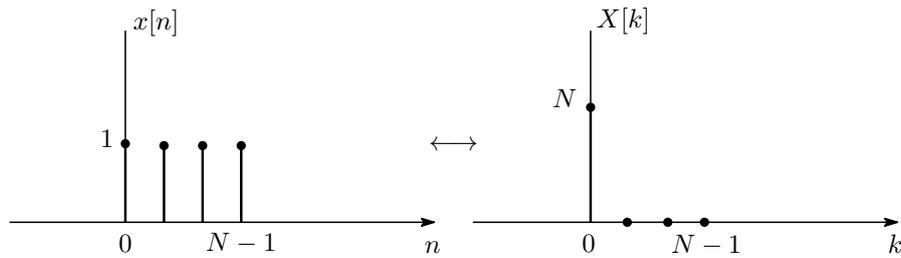
を得る。 $k = 0$ のとき、

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

である。一方、 $k = 1, 2, \dots, N-1$ のとき、

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = 0$$

である ($W_N^{kN} = e^{-j(2\pi/N)kN} = e^{-jk2\pi} = 1$)。以上より $X[k] = N\delta[k]$ となる。このときの $x[n]$ および $X[k]$ を図示すると次のようになる。



(5) (i) $x[n]$, $h[n]$ はそれぞれ

$$x[n] = \{1, 0, -1, 0\} \quad h[n] = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}$$

である。故に、

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{i=0}^3 x[i]h[n-i]_4 = x[0]h[n]_4 + x[2]h[n-2]_4 = h[n]_4 - h[n-2]_4$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} n=0 \text{ のとき} \quad y[0] &= h[0] - h[2] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ n=1 \text{ のとき} \quad y[1] &= h[1] - h[3] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\ n=2 \text{ のとき} \quad y[2] &= h[2] - h[0] = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ n=3 \text{ のとき} \quad y[3] &= h[3] - h[1] = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

であり、まとめると

$$y[n] = \left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\right\}$$

となる。

(ii) $x[n]$, $h[n]$ の 4 点 DFT はそれぞれ

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{kn} = 1 - W_4^{2k} \quad (k=0, 1, 2, 3) \\ H[k] &= \sum_{n=0}^3 h[n]W_4^{kn} = 1 + \frac{1}{2}W_4^k + \frac{1}{4}W_4^{2k} + \frac{1}{8}W_4^{3k} \quad (k=0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

である。 $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]X_2[k]$ より、 $y[n]$ の DFT は

$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k]H[k] = (1 - W_4^{2k}) \left(1 + \frac{1}{2}W_4^k + \frac{1}{4}W_4^{2k} + \frac{1}{8}W_4^{3k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}W_4^k - \frac{3}{4}W_4^{2k} - \frac{3}{8}W_4^{3k} - \frac{1}{4}W_4^{4k} - \frac{1}{8}W_4^{5k} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$W_4^{4k} = (W_4^4)^k = 1^k = 1, \quad W_4^{5k} = W_4^{(4+1)k} = W_4^k$$

であるから、

$$Y[k] = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}W_4^k - \frac{3}{4}W_4^{2k} - \frac{3}{8}W_4^{3k} \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

となる。これが

$$Y[k] = \sum_{n=0}^3 y[n]W_4^{nk} = y[0]W_4^{0k} + y[1]W_4^{1k} + y[2]W_4^{2k} + y[3]W_4^{3k}$$

に一致するので、結局

$$y[n] = \left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\right\}$$

となる。

第7章 演習問題 解答

- (1) (i) 長さ N の信号 $x[n]$ に対する N 点 DFT を $X[k]$ とする. $X[k]$ を時間間引き FFT により計算する手順は次の通りである. まず $x[n]$ を, その偶数番目のみからなる部分系列 $x_e[n]$ および奇数番目のみからなる部分系列 $x_o[n]$ に分解する. この際に複素乗算は不要である. 次に, $x_e[n]$ および $x_o[n]$ に対し, 各々の $\frac{N}{2}$ 点 DFT (これらを $X_e[k]$, $X_o[k]$ とする) を計算する. この計算には時間間引き FFT を再帰的に適用するため, 必要な複素乗算の回数は一つの $\frac{N}{2}$ 点 DFT につき $C_{\frac{N}{2}}$ 回であり, 合計で $2C_{\frac{N}{2}}$ 回が必要となる. 最後に, $X_e[k]$ および $X_o[k]$ から

$$\begin{cases} X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k] \\ X[k + \frac{N}{2}] = X_e[k] - W_N^k X_o[k] \end{cases}$$

として $X[k]$ を求める. ここでは, W_N^k と $X_o[k]$ との乗算が計 $\frac{N}{2}$ 回必要となる. 以上より,

$$C_N = 2C_{\frac{N}{2}} + \frac{N}{2}$$

の関係をj得る.

- (ii) 長さ 4 の信号 $y[n]$ ($n = 0, 1, 2, 3$) の DFT を直接計算により求める場合について考える. このとき, W_N の累乗は

$$W_4^p = \begin{cases} W_4^{4q} = W_4^0 = 1 & (p = 4q, q \in \mathbb{Z}) \\ W_4^{4q+1} = W_4^1 = -j & (p = 4q+1, q \in \mathbb{Z}) \\ W_4^{4q+2} = W_4^2 = -1 & (p = 4q+2, q \in \mathbb{Z}) \\ W_4^{4q+3} = W_4^3 = j & (p = 4q+3, q \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となるので, DFT 係数 $Y[k]$ ($n = 0, 1, 2, 3$) は

$$\begin{aligned} Y[0] &= (y[0] + y[2]) + (y[1] + y[3]) \\ Y[1] &= (y[0] - y[2]) - j \cdot (y[1] - y[3]) \\ Y[2] &= (y[0] + y[2]) - (y[1] + y[3]) \\ Y[3] &= (y[0] - y[2]) + j \cdot (y[1] - y[3]) \end{aligned}$$

として求まる. 上式より, 複素乗算が必要となるのは $j \cdot (y[1] - y[3])$ の箇所のみであり, その計算結果は $Y[1]$ と $Y[3]$ で共有できることが分かる. 従って, 4 点 DFT の直接計算に必要な複素乗算の回数は 1 回となる.

- (iii) 問い (ii) の関係式の両辺に $\frac{1}{N}$ を乗じることにより

$$\frac{1}{N} C_N = \frac{2}{N} C_{\frac{N}{2}} + \frac{1}{2} \tag{8}$$

を得る. ここで, N が 2 のべき乗であることから整数 l を $l = \log_2 N$ とおき, さらに

$$B_l = \frac{1}{2^l} C_{2^l} = \frac{1}{N} C_N$$

と定義すると, 式 (8) から次の漸化式が導かれる.

$$B_l = B_{l-1} + \frac{1}{2}$$

一方, 問い (iii) の内容から

$$B_2 = \frac{1}{4} C_4 = \frac{1}{4}$$

である. 以上のことから B_l は

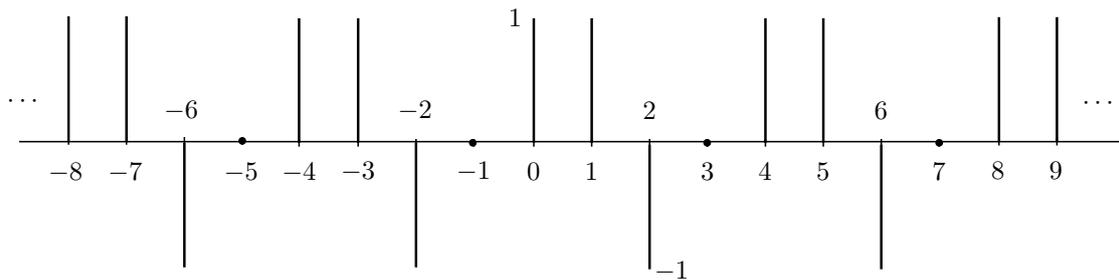
$$B_l = B_2 + (l-2) \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + (-2 + \log_2 N) \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \log_2 N$$

と求まる. 従って,

$$C_N = N B_l = -\frac{3}{4} N + \frac{N}{2} \log_2 N$$

となる.

(2) (i) 下図の通り.



基本周期 4

(ii) $x[n]$ は基本周期 4 の周期信号なので,

$$x[n] = \sum_{k=0}^3 a_k e^{j(\frac{2\pi}{4})nk} = \sum_{k=0}^3 a_k e^{j(\frac{\pi}{2})nk}$$

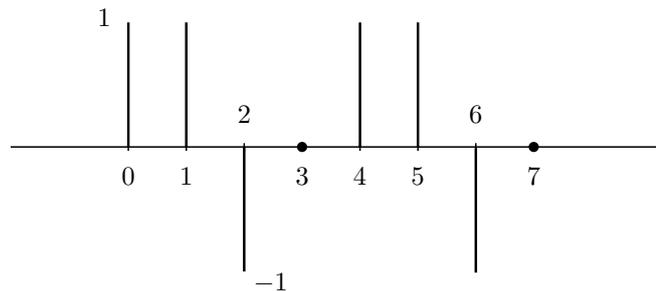
のように離散フーリエ級数に展開できる. $x[n]$ の一周分として $n = 0, 1, 2, 3$ に着目すると, $x[0] = x[1] = 1, x[2] = -1, x[3] = 0$ より, フーリエ係数 a_k は

$$a_k = \frac{1}{4} \left(x[0]e^0 + x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}k} + x[2]e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2k} + x[3]e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3k} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\pi k} \right)$$

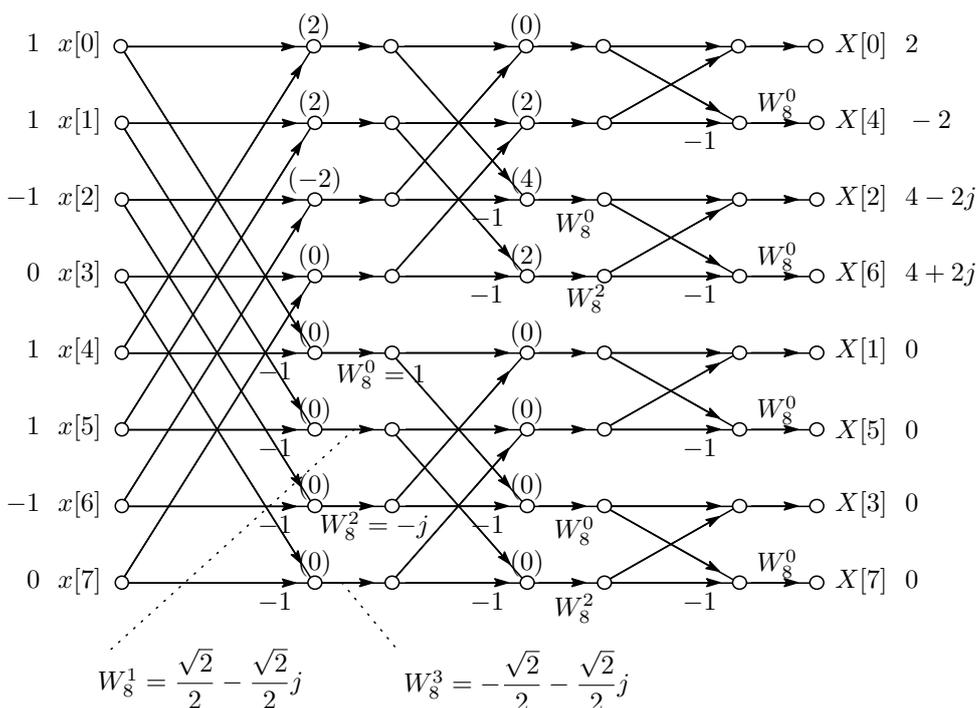
となる. より具体的には,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \\ a_1 &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\pi} \right) = \frac{1}{4}(2 - j) \\ a_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} - e^{-j2\pi} \right) = -\frac{1}{4} \\ a_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3} - e^{-j3\pi} \right) = \frac{1}{4}(2 + j) \end{aligned}$$

(iii) $x_d[n] = \{1, 1, -1, 0, 1, 1, -1, 0\}$. 図は以下の通り.



(iv) 下図の通り.



(v) $\overline{X[k]}$ ($k = 0, \dots, 7$) を 8 点信号と見なして問い (iv) のフローグラフに入力し, その出力を 8 で割ると, 元の信号 $x[n]$ が得られる. 具体的な計算式はここでは省略する.

(3) (i) オイラーの公式より

$$X[k] = \sum_{n=0}^{31} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) W_{32}^{kn} = \sum_{n=0}^{31} \frac{e^{j\frac{\pi n}{4}} + e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2} W_{32}^{kn}$$

である. ここで

$$\sum_{n=0}^{31} e^{j\frac{\pi n}{4}} W_{32}^{kn} = \sum_{n=0}^{31} e^{j\left(\frac{8-2k}{32}\pi n\right)} = \begin{cases} 32, & k = 4 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であり, また, 同様に

$$\sum_{n=0}^{31} e^{-j\frac{\pi n}{4}} W_{32}^{kn} = \sum_{n=0}^{31} e^{j\left(\frac{56-2k}{32}\pi n\right)} = \begin{cases} 32, & k = 28 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるので, 結局

$$X[k] = \begin{cases} 16, & k = 4 \text{ のとき} \\ 16, & k = 28 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と求まる.

(ii) DFT の定義式に従って直接計算する場合, $32^2 = 1024$ 回の複素乗算と $32(32 - 1) = 992$ 回の複素加算が必要になる. これに対し, FFT により計算する場合, $\left(\frac{32}{2}\right) \log_2 32 = 16 * 5 = 80$ 回の複素乗算と $32 \log_2 32 = 32 * 5 = 160$ 回の複素加算だけで良い. すなわち, FFT を用いることにより, 複素乗算の計算時間は約 8% に, 複素加算の計算時間は約 16% に, それぞれ短縮される.

- (4) 20 [kHz] = 20000 [Hz] のサンプリングレートでは $\frac{1}{20000}$ [sec] ごとに 1 サンプルが取得される。従って、4096 個のサンプルからなるブロックを一つ得るまでの時間は $4096 \times \frac{1}{20000} = \frac{2^{12}}{2^5 \times 5^4} = \frac{2^7}{5^4}$ [sec] である。この間に、4096 点 DFT, 4096 点 IDFT, それ以外の処理, の全てを終えられればリアルタイム処理が成立する。

4096 点 DFT を直接計算する場合、複素乗算は $4096^2 = (2^{12})^2 = 2^{24}$ 回必要であり、複素乗算 1 回につき 4 回の実乗算が必要になることを考慮すると、DFT の計算時間はトータルで $2^{24} \times 4 \times \frac{5}{6} [\mu\text{sec}]$ すなわち $\frac{2^{26} \times 5}{6 \times 10^6} = \frac{2^{19}}{3 \times 5^5}$ [sec] となるが、これは $\frac{2^7}{5^4}$ より大きいため、直接計算ではリアルタイム処理は成立しない。従って、必然的に FFT を使用することになる。

FFT を使用する場合、複素乗算の回数は $\frac{4096}{2} \log_2 4096 = \frac{2^{12}}{2} \log_2 2^{12} = 2^{11} \times 12 = 3 \times 2^{13}$ 回まで削減され、処理時間は $3 \times 2^{13} \times 4 \times \frac{5}{6} [\mu\text{sec}]$ すなわち $\frac{3 \times 2^{15} \times 5}{6 \times 10^6} = \frac{2^8}{5^5}$ [sec] となる。4096 点 IDFT にも同じだけの時間がかかるので、DFT および IDFT 以外で残されている時間は

$$\frac{2^7}{5^4} - 2 \times \frac{2^8}{5^5} = 5 \times \frac{2^7}{5^5} - 4 \times \frac{2^7}{5^5} = \frac{2^7}{5^5} = \frac{128}{3125} = 0.04096 [\text{sec}]$$

となる。これはすなわち 40.96 [msec] である。

- (5) (i) B_{i-1} に対する処理は、 $x[(i-1)N-1]$ が観測された時点で直ちに開始され、 $x[iN-1]$ が観測されるまでに終了しなければならない。よって、

$$(iN-1) - ((i-1)N-1) = N$$

個のサンプルを観測するだけの時間が (a)(b)(c) の計算に利用できる時間の最大値となる。ここで、 $x[n]$ のサンプリングレートは 2^{12} [Hz] であるから、サンプリング周期は 2^{-12} [秒] である。以上より、(a)(b)(c) の計算時間の合計は

$$2^{-12}N [\text{秒}]$$

以下でなければならない。

- (ii) (b) においては、一つの k について $Y[k]$ を求めるのに $3 \cdot 2^{-15}$ [秒] を要し、それが $k = 0, 1, \dots, N-1$ の N 個分必要になることから、計算時間は $3 \cdot 2^{-15}N$ [秒] となる。よって、問い (i) の結果と合わせて考えると、(a)(c) の計算に残されている時間は

$$2^{-12}N - 3 \cdot 2^{-15}N = 8 \cdot 2^{-15}N - 3 \cdot 2^{-15}N = 5 \cdot 2^{-15}N [\text{秒}]$$

となる。

(a)(c) を直接計算により実行する場合、各々 N^2 回の複素乗算が必要になり、また、複素乗算 1 回につき 2^{-16} [秒] を要することから、(a)(c) に必要な計算時間の合計は

$$2 \times N^2 \times 2^{-16} = 2^{-15}N^2 [\text{秒}]$$

である。従って、問題文の処理が成立するための条件は

$$2^{-15}N^2 \leq 5 \cdot 2^{-15}N \iff N \leq 5$$

となる (N が 2 のべき乗であることを考慮するなら $N \leq 4$)。

一方、(a)(c) の実行に FFT アルゴリズムを適用する場合、複素乗算の回数は各々 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回まで削減される。この場合、(a)(c) に必要な計算時間の合計は

$$2 \times \frac{N}{2} \log_2 N \times 2^{-16} = 2^{-16}N \log_2 N [\text{秒}]$$

となり、問題文の処理が成立するための条件は

$$2^{-16}N \log_2 N \leq 5 \cdot 2^{-15}N \iff \log_2 N \leq 5 \cdot 2 = 10$$

すなわち $N \leq 2^{10} = 1024$ となる。

(iii) $h[n]$ の N 点 DFT を $H[k]$ とすると,

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]W_N^{nk} = h[0]W_N^0 + h[1]W_N^k = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)$$

である。ここで,

$$1 + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = \left(e^{j\frac{\pi}{N}k} + e^{-j\frac{\pi}{N}k} \right) e^{-j\frac{\pi}{N}k} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{N}k \right) e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

より, 結局

$$H[k] = \cos \left(\frac{\pi}{N}k \right) e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

となる。

(iv) 問い (iii) の $H[k]$ を用いると, (b) の処理は $Y[k] = H[k]X[k]$ と表せる。DFT では周波数領域における積が時間領域における巡回畳込みに相当することを踏まえ, 上式の両辺を IDFT することにより

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m]_N = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1]_N)$$

を得る ($i = 1$ のとき)。別の書き方をすると

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} (x[0] + x[N-1]) & (n = 0) \\ \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1]) & (n = 1, \dots, N-1) \end{cases}$$

である。以上より, (b) の処理は, 時間領域においては, 1 ブロック分の信号を周期的拡張した上で平均化フィルタを適用することに相当する。

(6) (i) 5 秒間に 40960 個のサンプル値を生成するという事は, 1 秒あたり $40960/5 = 8192$ 個のサンプル値を生成するという事であり, すなわちサンプリング周波数が 8192 [Hz] であるということに他ならない。このとき, ナイキスト周波数は 4096 [Hz] となる。ここで, もし $x(t)$ がエイリアシングなしでサンプリングされたとすると, それに含まれる周波数成分は, 最も高周波なものでもナイキスト周波数以下でなければならない。故に, $x(t)$ の最高周波数は 4096 [Hz] である。

(ii) 2048 点 DFT を用いると, $0 \sim 2\pi$ の間で 2048 等分された周波数サンプル点で連続スペクトル $X(\Omega)$ をサンプリングすることになる。サンプリング周波数が 8192 [Hz] であるから, 上記は $0 \leq f \leq 8192$ [Hz] の範囲での 2048 個の周波数サンプルに相当する。故に, 周波数間隔は $\Delta f = \frac{8192}{2048} = 4$ [Hz] となる。

(iii) $\Delta f = 4$ であるので, $400 \leq f \leq 600$ [Hz] の周波数帯域では $1 + (600 - 400)/4 = 51$ 個の DFT サンプルを得ることになる。直接計算の場合, この 51 個のそれぞれについて, DFT 係数を計算するのに 2048 回の複素乗算が必要となるので, トータルに必要な複素乗算の回数は

$$51 \times 2048 = 104448 \text{ 回}$$

となる。他方, FFT を使う場合, 特定の DFT サンプルに関する係数のみを選択的に計算することはできないので, 全ての DFT 係数を求めることになり, それに必要な複素乗算の回数は

$$\frac{2048}{2} \log_2 2048 = 1024 \times 11 = 11264 \text{ 回}$$

となる。

(iv) N 点 FFT には $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回の複素乗算が必要である。一方, M 個の DFT 係数を直接計算するには $M \times N$ 回の複素乗算が必要である。よって,

$$M \times N > \frac{1}{2} N \log_2 N$$

すなわち

$$M > \frac{1}{2} \log_2 N$$

であるならばFFTは直接計算よりも効率が良いものとなる。本問では $N = 2048 = 2^{11}$ であるので、上述の条件式は $M > \frac{11}{2} = 5.5$ となり、 M が整数であることを考慮すると、 $M \geq 6$ のとき、FFTの方が効率的となる。

(7) (i) $x[n] = x\left(\frac{n}{f_s}\right)$ であるので、 $x(t) = e^{j(2\pi ft)}$ のとき、

$$x[n] = e^{j(2\pi f \frac{n}{f_s})} = e^{j(2\pi \frac{f}{f_s} n)}$$

となる。

(ii) $y[n]$ は $Y[k]$ を用いて

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn}$$

と表せる (IDFT)。ここで、長さ1秒の連続時間信号をサンプリングして N 点の離散時間信号を得るということは、1秒間に N 個のサンプル値を得るということであり、サンプリング周波数 f_s が $f_s = N$ を満たす、ということの意味する。よって、本問においては

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{j(2\pi \frac{k}{f_s} n)}$$

であり、これを問い (i) の結果と比較することにより、 $Y[k]$ は k [Hz] の成分に対応することが分かる。

(iii) 問い (ii) より、 $Y[k]$ は k [Hz] の成分に対応し、従って $Y[k+1]$ は $k+1$ [Hz] の成分に対応する。故に周波数間隔は

$$(k+1) - k = 1 \text{ [Hz]}$$

(iv) 直接計算の場合、1個のDFT係数につき N 回の複素乗算が必要であるため、トータルでは N^2 回。一方、FFTを用いる場合、 $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回。

(v) 直接計算では特定の M 個のDFT係数を選択的に計算できるので、必要な複素乗算の回数は MN 回となる。これに対し、FFTでは常に全てのDFT係数を一度に求めることになるため、必要な複素乗算の回数は M によらず $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回である。従って、FFTの方が複素乗算の回数が少なくなるのは

$$MN > \frac{N}{2} \log_2 N \iff M > \frac{1}{2} \log_2 N$$

のときである。 $N = 1024 = 2^{10}$ の場合、上記の条件式は $M > 5$ となる。

(8) (i) 単一の n について $y[n]$ を直接計算するのに必要な複素乗算の回数は次の通り。

- $0 \leq n \leq L-2$ のとき: $n+1$ 回
- $L-1 \leq n \leq N-1$ のとき: L 回
- $N \leq n \leq N+L-2$ のとき: $(N+L-1)-n$ 回

従って、任意の n について $y[n]$ を直接計算するのに必要な複素乗算の回数を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{L-2} (n+1) + \sum_{n=L-1}^{N-1} L + \sum_{n=N}^{N+L-2} \{(N+L-1)-n\} \\ &= \sum_{n=1}^{L-1} n + \{(N-1) - (L-1) + 1\}L + \sum_{n=1}^{L-1} n \\ &= \frac{1}{2}L(L-1) + NL - L(L-1) + \frac{1}{2}L(L-1) = NL \end{aligned}$$

- (ii) 必要な処理は、 $\tilde{h}[n]$ の DFT, $\tilde{x}[n]$ の DFT, $\tilde{X}[k]$ と $\tilde{H}[k]$ の乗算, $\tilde{Y}[k]$ の IDFT の 4 つである。DFT および IDFT に FFT アルゴリズムを用いるとすると、各々の計算に必要な複素乗算の回数は $\frac{M}{2} \log_2 M$ 回。一方、任意の k ($0 \leq k < M$) について $\tilde{X}[k]$ と $\tilde{H}[k]$ の積を求めるのに必要な複素乗算の回数は M 回。従って、必要となる複素乗算の総数を S' とすると

$$S' = M + 3 \cdot \frac{M}{2} \log_2 M = M \left(1 + \frac{3}{2} \log_2 M \right)$$

- (iii) $N = L = 512 = 2^9$ より、(b) の方法は $M = 2^{10} (> 2^9 + 2^9 - 1)$ のとき最も効率的となる。この条件下では $M = N + L = 2N$ となるので、(b) の方法に必要な複素乗算の回数は N を用いて

$$\begin{aligned} 2N \left(1 + \frac{3}{2} \log_2(2N) \right) &= N \{ 2 + 3(\log_2 2 + \log_2 N) \} \\ &= N(5 + 3 \log_2 N) \end{aligned}$$

と表せる。これに対し、直接計算に必要な複素乗算の回数は $NL = N^2$ 回となるため、(b) の方法は直接計算に比べ

$$\frac{N^2}{N(5 + 3 \log_2 N)} = \frac{N}{5 + 3 \log_2 N} \text{ 倍}$$

効率的となる。上式に $N = 512 = 2^9$ を代入すると

$$\frac{2^9}{5 + 3 \cdot 9} = \frac{2^9}{32} = 2^4 = 16 \text{ 倍}$$

- (9) 2 つの実数信号列 $x_1[n], x_2[n]$ の N 点 DFT をそれぞれ $X_1[k], X_2[k]$ とすると、これらは次のような 1 つの N 点 DFT から求めることができる。まず、 N 点複素信号列を

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n]$$

のように作成する。次に、 $x[n]$ の N 点 DFT を計算する。その結果を $X[k]$ とする。最後に、DFT の対称性を利用して $X[k]$ から $X_1[k]$ および $X_2[k]$ を抽出する。まず、

$$X_1[k] = \frac{1}{2} \left(X[k] + \overline{X[N-k]_N} \right)$$

とする。これは $X[k]$ の共役対称な部分に相当する。そして、

$$X_2[k] = \frac{1}{2j} \left(X[k] - \overline{X[N-k]_N} \right)$$

とする。これは $X[k]$ の共役非対称な部分に相当する。但し、 $[N-k]_N$ は $[N-k]$ を N で割った余りを表す。

第 8 章 演習問題 解答

- (1) (i) DTFT の定義式に $x[n] = r_0[n]$ を代入し

$$R_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n}$$

を得る。 $\Omega \neq 2\pi m$ (m : 整数) のとき、

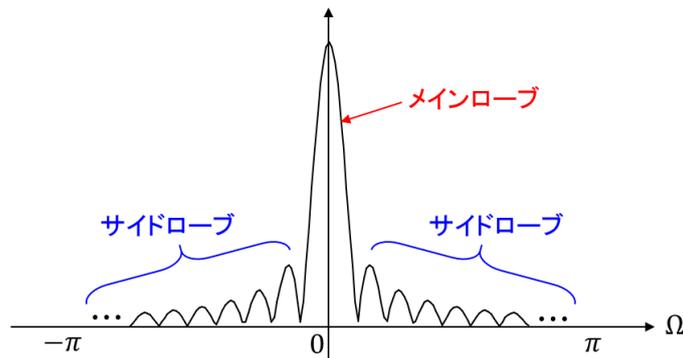
$$\begin{aligned} R_0(\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{(e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2}) e^{-j\Omega N/2}}{(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) e^{-j\Omega/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2} N\right) e^{-j\Omega N/2}}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\Omega/2}} = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\frac{\Omega}{2}(N-1)} \end{aligned}$$

となる。一方、 $\Omega = 2\pi m$ (m : 整数) のとき、

$$R_0(0) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

となる。

- (ii) $|R_0(\Omega)|$ の概形は下図のようになる。 $r_0[n]$ は矩形窓であり、そのメインローブは幅が狭く急峻であるという性質がある。このため、各周波数成分が周りの周波数成分の影響を受けにくく、周波数分解能が高いという長所がある。一方、サイドローブについては、その高さが非常に高いという性質がある。従って、ある周波数成分がノイズに埋もれることなく検出されるためには、その振幅がある程度大きくななければならない。すなわち、ダイナミックレンジが狭いという短所がある。



- (iii) $r_d[n]$ と $r_0[n]$ は

$$r_d[n] = r_0[n - d]$$

の関係を満たす。上式より、

$$\begin{aligned} R_d(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_d[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0[n - d]e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_0[m]e^{-j\Omega(m+d)} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_0[m]e^{-j\Omega m} \right] e^{-j\Omega d} = R_0(\Omega)e^{-j\Omega d} \end{aligned}$$

を得る。ただし、1行目から2行目への展開では $m = n - d$ とおいた。

- (iv) 問題文の条件より

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\Omega n}, \quad g[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\Omega')e^{j\Omega' n} d\Omega'$$

が成り立つ (DTFT および IDTFT の定義式)。これらの関係式から、

$$\begin{aligned} f[n]g[n] &\stackrel{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\Omega')e^{j\Omega' n} d\Omega' \right] e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j(\Omega - \Omega') n} \right] G(\Omega') d\Omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Omega - \Omega')G(\Omega') d\Omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\Omega) \otimes G(\Omega) \end{aligned}$$

を得る。

(v) 関係式 $y_d[n] = x[n]r_d[n]$ に関し (iv) の結果を適用し,

$$Y_d(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes R_d(\Omega)$$

を得る. ここで, 関し (i)(iii) の結果より,

$$R_d(\Omega) = R_0(\Omega)e^{-j\Omega d} = \frac{\sin(\frac{\Omega}{2}N)}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\frac{\Omega}{2}(N-1)} e^{-j\Omega d} = \frac{\sin(\frac{\Omega}{2}N)}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega(\frac{N-1}{2}+d)}$$

である. 従って,

$$Y_d(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \otimes \frac{\sin(\frac{\Omega}{2}N)}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega(\frac{N-1}{2}+d)}$$

となる.

(vi) 時間間引き FFT により $\tilde{Y}_d[k]$ を求める場合, まず $\tilde{y}_d[m] = y_d[m+d]$ を

$$z_d[m] = \tilde{y}_d[2m] = y_d[2m+d], \quad z'_d[m] = \tilde{y}_d[2m+1] = y_d[2m+1+d]$$

として偶数部分 $z_d[m]$ と奇数部分 $z'_d[m]$ の二つに分解し, 次に各々の $\frac{N}{2}$ 点 DFT を再帰的に計算したのち, 最後にその結果を統合するという手順を踏む. この処理に必要な複素乗算の回数は一般に $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回である. ここで, $\tilde{Y}_{d+1}[k]$ の計算においては, $\tilde{y}_{d+1}[m] = y_{d+1}[m+d+1]$ の偶数部分が

$$z_{d+1}[m] = \tilde{y}_{d+1}[2m] = y_d[2m+d+1] = z'_d[m]$$

となり, $\tilde{y}_d[m]$ の奇数部分に一致することが分かる. 従って, $z_{d+1}[m]$ の $\frac{N}{2}$ 点 DFT は $\tilde{Y}_d[k]$ を求めるときに既に計算済みであり, 改めて再計算する必要はない. このことから, $1 \leq d < L$ においては, N 点 DFT の計算に必要な複素乗算の回数は, $\frac{N}{2}$ 点 DFT が 1 回分, バタフライ演算が $\frac{N}{2}$ 回分, 合計 $\frac{N}{4} \log_2 \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N}{4}(1 + \log_2 N)$ 回となる. $d = 0$ のときは通常通り $\frac{N}{2} \log_2 N$ 回の複素乗算が必要となるので, 結局合計で

$$\frac{N}{2} \log_2 N + (L-1) \cdot \frac{N}{4}(1 + \log_2 N) = \frac{(L+1)N}{4} \log_2 N + \frac{(L-1)N}{4}$$

回の複素乗算を要することになる.

第9章 演習問題 解答

(1) (i) z 変換の定義式より,

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

である. ここで, $X(z)$ の収束領域 R に対し $z \in R$ であるとき, 右辺は z について項別微分可能であることに注意して両辺を z で微分すると,

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](-k)z^{-k-1} = -z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k]z^{-k}$$

となる. 上式の両辺に $-z$ を乗じることにより

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx[k]z^{-k}$$

を得る. 前述の通り, 上式は $z \in R$ においてのみ成り立つので, 収束領域は R である.

(ii) 単位ステップ信号 $u[n]$ を用いて

$$u[n] * nx[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]kx[k] = \sum_{k=-\infty}^n kx[k]$$

と表せることに注意すると、畳込みに関する z 変換の性質より

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{k=-\infty}^n kx[k] \right] = \mathcal{Z}[u[n] * nx[n]] = \mathcal{Z}[u[n]] \mathcal{Z}[nx[n]]$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

であるから (収束領域は $R_u = \{z \mid |z| > 1\}$)、問い (i) の結果と合わせ、

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{k=-\infty}^n kx[k] \right] = \frac{-z}{1-z^{-1}} \frac{dX(z)}{dz} = \frac{z^2}{1-z} \frac{dX(z)}{dz}$$

を得る (収束領域は $R_u \cap R$ を含む)。

(2) $x[n]$, $y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z)$, $Y(z)$ とすると、

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2}{2-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u[-n]z^{-n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n u[-n-1]z^{-n} = 1 - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-2z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

となる ($X(z)$ の ROC は $R_1 = \{z \mid |z| > \frac{1}{2}\}$, $Y(z)$ の ROC は $R_2 = \{z \mid |z| < 2\}$)。故に、 $w[n] = x[n] * y[n]$ の z 変換を $W(z)$ とすると、畳込みに関する z 変換の性質より

$$W(z) = X(z)Y(z) = \frac{2}{2-z^{-1}} \cdot \frac{-2z^{-1}}{1-2z^{-1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

となる (ROC は $R_1 \cap R_2 = \{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$)。上式を逆 z 変換することにより、

$$x[n] * y[n] = w[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3} 2^n u[-n-1] = \frac{4}{3} 2^{-|n|}$$

を得る。

(3) (i) システムが因果的であるとき、そのインパルス応答 $h[n]$ は右側 ($n \geq 0$) のみ値を持つので、

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

となる。右辺のべき級数が任意の z において収束しない場合、伝達関数 $H(z)$ 自体が定義できないので、少なくとも何れかの一点では収束するものとし、これを $z = z_0$ とおく。このとき、任意の $n \geq 0$ に対し $|h[n]z_0^{-n}| \leq M$ が成り立つような定数 M が存在する (そうでなければ $z = z_0$ において上記級数が収束しない) ので、 $|z| > |z_0|$ を満たす任意の z について、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]z_0^{-n}| \frac{|z^{-n}|}{|z_0^{-n}|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{|z_0|}{|z|}\right)^n = \frac{M}{1-c} < \infty$$

が成り立つ ($\frac{|z_0|}{|z|} = c$ とおき、 $0 < c < 1$ であることを利用)。これは $|z| > |z_0|$ において上記級数が絶対収束することを意味しており、絶対収束する無限級数は必ず収束することから、 $H(z)$ も $|z| > |z_0|$ において収束する。ROC は原点を中心として $|z_0| = \gamma$ を通る円の外側、すなわち $|z| > \gamma$ となる。

(ii) 入力 $x[n]$, 出力 $y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z)$, $Y(z)$ とすると, $Y(z) = H(z)X(z)$ より,

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = Y(z) \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

が成り立つ. $Y(z)$ は,

$$Y(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

と求まる (ROC は $\frac{1}{4} < |z| < 2$). 以上を踏まえ,

$$X(z) = \frac{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - 2z^{-1}} + \frac{C}{1 + z^{-1}}$$

とおくと, 留数定理に従って

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z) \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{(1 - 2z^{-1})(1 + z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{1}{15} \\ B &= (1 - 2z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ C &= (1 + z^{-1}) X(z) \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

と計算できる. いま, $h[n]$ は因果的であるから, $H(z)$ の ROC は $|z| > \frac{1}{2}$ である. これと $Y(z)$ の ROC から, $X(z)$ の ROC は $\frac{1}{4} < |z| < 1$ であることになる. このことを踏まえて $X(z)$ を逆 z 変換し,

$$x[n] = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{2}{3} 2^n u[-n-1] - \frac{4}{15} (-1)^n u[-n-1]$$

- (4) 通信路の特性を表すシステムの伝達関数を $F(z)$, 復元処理を行うシステムの伝達関数を $G(z)$ とする. また, 復元処理を施された信号を $w[n]$ とし, さらに, 原信号 $x[n]$, 観測信号 $y[n]$, 復元信号 $w[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z)$, $Y(z)$, $W(z)$ とする. このとき

$$Y(z) = F(z)X(z), \quad W(z) = G(z)Y(z)$$

が成り立つ. 従って, 原信号と復元信号の間には $W(z) = G(z)F(z)X(z)$ という関係が成り立つ. ここで, 復元信号が原信号に一致する, すなわち, $W(z) = X(z)$ とするためには, $G(z)F(z) = 1$ という関係を満たしていれば良い. これより, 復元処理を施す信号処理システムの伝達関数は $G(z) = \frac{1}{F(z)}$ となる. ところで, 通信路の伝達関数は

$$F(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-5} + \frac{1}{4}z^{-10}$$

であるから, 復元処理を行うシステムの伝達関数は

$$G(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-5} + \frac{1}{4}z^{-10}} = \frac{z^{10}}{z^{10} + \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{4}}$$

となる.

次に, 復元処理システムの安定性を調べるために, $G(z)$ の極, すなわち, $G(z)$ の分母多項式の根について考える. 簡単な計算によって, $z^{10} + \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{4} = 0$ の根は, $z^5 = -\frac{1}{4}(1 + j\sqrt{3})$ および $z^5 = -\frac{1}{4}(1 - j\sqrt{3})$ の根であることが分かるが,

$$\left| -\frac{1}{4}(1 \pm j\sqrt{3}) \right| = \frac{1}{2}$$

であるから, これらの根の絶対値は全て $(\frac{1}{2})^{1/5}$ であり, $G(z)$ の極は全て複素平面上における単位円内部に存在することになる. 従って, この復元処理システムは安定である.

- (5) (i) $x[n], y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z)$ とおく. 所与の入出力差分方程式の両辺について, その z 変換を計算することにより

$$Y(z) = \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{16}Y(z)z^{-3} + X(z) - \frac{1}{8}X(z)z^{-2} + \frac{1}{8}X(z)z^{-3}$$

を得る. $Y(z)$ に関する項を左辺に, $X(z)$ に関する項を右辺にまとめると

$$\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-3}\right)Y(z) = \left(1 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}\right)X(z)$$

となる. 伝達関数 $H(z)$ は $\frac{Y(z)}{X(z)}$ で与えられるので,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-3}} = \frac{z^3 - \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}}{z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{16}} = \frac{16z^3 - 2z + 2}{16z^3 - 12z^2 + 1}$$

- (ii) 問い (i) の $H(z)$ の分母を $S(z) = z^3 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{16}$ とおく. このとき,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = 0$$

であることから, $S(z)$ は $z - \frac{1}{2}$ を因数に持つことが分かる. 従って, $S(z)$ は

$$S(z) = \left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = \left\{\left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\}\left(z - \frac{1}{2}\right) = \left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$$

のように因数分解できる. 上式は, 伝達関数 $H(z)$ の極が $z = \frac{1}{2}$ および $z = -\frac{1}{4}$ であることを示している. これらは何れも z 平面における単位円内部の点であるので, システム L は BIBO 安定である.

- (iii) 微分に関する z 変換の性質を $f[n] = a^n u[n]$ の場合に適用する.

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (\text{ROC} : |a| < |z|) \quad (9)$$

であること, および

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = -\frac{az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2}$$

であることから,

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \left(-\frac{az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad (\text{ROC} : |a| < |z|) \quad (10)$$

が導かれる. 式 (9)(10) と z 変換の線形性から,

$$\begin{aligned} (n+1)a^n u[n] &= na^n u[n] + a^n u[n] \\ \xleftrightarrow{z} &\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} + \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \quad (\text{ROC} : |a| < |z|) \end{aligned}$$

となる. 以上により問題文の z 変換対が成り立つことが示された.

- (iv) 問い (i)(ii) より, $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{z^3 - \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}}{\left(z + \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

である. このことを踏まえ,

$$H(z) = A + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{D}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

とおく. まず A は

$$A = H(z)|_{z=0} = \frac{\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \quad (11)$$

と計算される。次に、 B, D は

$$B = \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) H(z) \Big|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{8}(-4)^2 + \frac{1}{8}(-4)^3}{\left(1 - \frac{1}{2}(-4)\right)^2} = \frac{1 - 2 - 8}{(1+2)^2} = -1 \quad (12)$$

$$D = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 H(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 2^3}{1 + \frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{1 - \frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 \quad (13)$$

と計算される。最後に C について、本問では

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 H(z) = \frac{1 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

であるから、

$$\frac{d}{dz} \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 H(z) \right] = \frac{\left(\frac{1}{4}z^{-3} - \frac{3}{8}z^{-4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right) - \left(1 - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}\right) \left(-\frac{1}{4}z^{-2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

であり、従って、

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 H(z) \right] \Big|_{z=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{8} \cdot 2^4\right) \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 2\right) - \left(1 - \frac{1}{8} \cdot 2^2 + \frac{1}{8} \cdot 2^3\right) \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 2\right)^2} \\ &= \frac{(2-6) \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + 1\right) (-1)}{2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-4+1}{3} = -1 \end{aligned} \quad (14)$$

と計算される。式 (11)(12)(13)(14) より、 $H(z)$ は

$$H(z) = 2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

と表せる。ここで、システム L は BIBO 安定であるので、その伝達関数の ROC は z 平面上の単位円およびその外部を含まなければならない。すなわち、ROC は $|a| < |z|$ の形で表されていない。この場合、

$$\begin{aligned} \delta[n] &\xleftrightarrow{z} 1 \\ a^n u[n] &\xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \end{aligned}$$

であり、また、問い (iii) の結果より、

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} H(z) &\xleftrightarrow{z} 2\delta[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ &= 2\delta[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

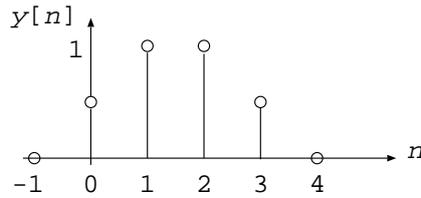
となる。従って

$$h[n] = 2\delta[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- (6) (i) 平均化フィルタの伝達関数は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$ となる。一方、問題文中に図示されている $x[n]$ の z 変換は $1 + z^{-1} + z^{-2}$ である。したがって、出力 $y[n]$ の z 変換は、

$$Y(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{2} + z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}$$

となる。これを逆 z 変換することにより、以下の時間応答が得られる。



(ii) 周波数応答 $M(\Omega)$ は、伝達関数に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより得られる。したがって、

$$M(\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

を得る。これより、ゲイン特性 $|M(\Omega)|$ および位相特性 $\angle M(\Omega)$ は

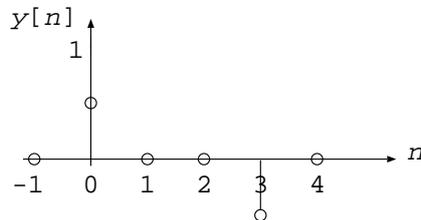
$$|M(\Omega)| = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \angle M(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}$$

と求まる。この結果より、平均化フィルタは低域通過特性を持つことがわかる。このことは、平均化フィルタはゆっくりと変化する信号をよく通すことを意味しており、問い (i) で得られた時間応答の結果と整合している。

(7) (i) 差分フィルタの伝達関数は $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}$ となる。一方、問題文中に図示されている $x[n]$ の z 変換は $1 + z^{-1} + z^{-2}$ である。したがって、出力 $y[n]$ の z 変換は、

$$Y(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-3}$$

となる。これを逆 z 変換することにより、以下の時間応答が得られる。



(ii) 周波数応答 $D(\Omega)$ は、伝達関数に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより得られる。したがって、

$$D(\Omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2j} \cdot je^{-j\frac{\Omega}{2}} = \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}\right)}$$

を得る。これより、ゲイン特性 $|D(\Omega)|$ および位相特性 $\angle D(\Omega)$ は

$$|D(\Omega)| = \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \angle D(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}$$

と求まる。この結果より、差分フィルタは高域通過特性を持つことがわかる。このことは、差分フィルタは急激に変化する信号をよく通すことを意味しており、問い (i) で得られた時間応答の結果と整合している。

(8) (i) $x[n], y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z)$ とおく。所与の入出力差分方程式の両辺について、その z 変換を計算することにより

$$\begin{aligned} Y(z) &= -\frac{1}{4}X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{4}X(z)z^{-2} \\ &= -\frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{4}X(z) = -\left(\frac{1 - z^{-1}}{2}\right)^2 X(z) \end{aligned}$$

を得る。上式より伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = -\left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}$$

と求まる。

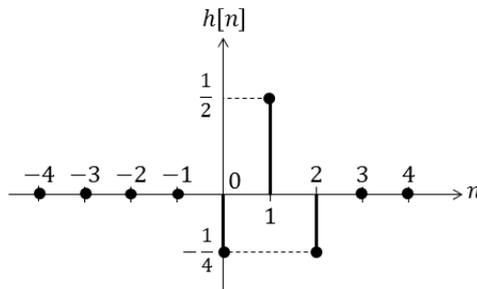
(ii) 所与の入出力差分方程式に $x[n] = \delta[n]$ を代入することにより、インパルス応答 $h[n]$ は

$$h[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

と求まる。もしくは、 z^{-d} の逆 z 変換が $\delta[n-d]$ であることから、問い (i) の $H(z) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}$ を逆 z 変換することにより、同様に

$$h[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

と求まる。これを図示すると下図のようになる。



(iii) まず、システム L の周波数応答を求める。 L は FIR システムであり伝達関数 $H(z)$ は $z = 0$ を除く全域において収束するので、この $H(z)$ に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより周波数応答が得られる。 $1 - z^{-1}$ に $z = e^{j\Omega}$ を代入すると

$$1 - e^{-j\Omega} = (e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}) e^{-j\frac{\Omega}{2}} = 2j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

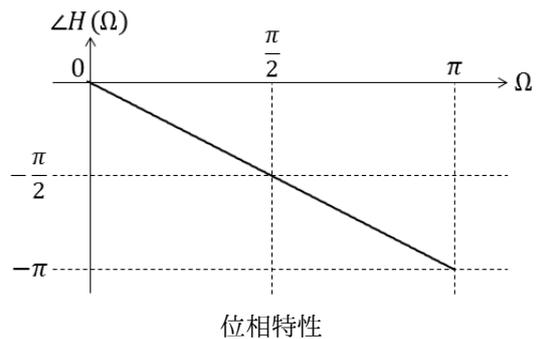
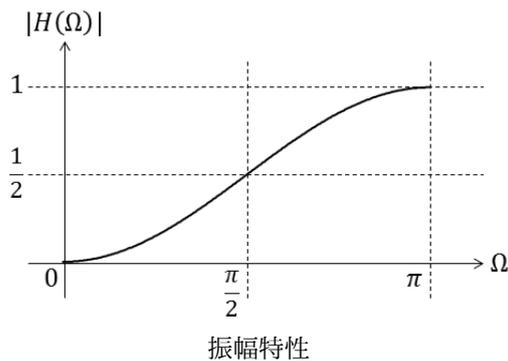
となることから、周波数応答は

$$H(\Omega) = -\left(j \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{-j\Omega}$$

と求まる。従って、振幅特性と位相特性はそれぞれ

$$|H(\Omega)| = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \angle H(\Omega) = -\Omega$$

となる。これらを図示すると下図のようになる。



(iv) 所与の入出力差分方程式に $x[n] = \sin(\Omega_0 n)$ を代入することにより $y[n]$ を求める.

$$y[n] = -\frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{4}x[n-2] = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1]) - \frac{1}{2}(x[n-1] - x[n-2]) \right\}$$

と変形できることから, まず $w[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$ について考える. 正弦関数の和積公式より,

$$\begin{aligned} w[n] &= \frac{1}{2} (\sin(\Omega_0 n) - \sin(\Omega_0(n-1))) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(\Omega_0 n) + \sin(-\Omega_0 n + \Omega_0)) \\ &= \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \cos\left(\Omega_0 n - \frac{\Omega_0}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \sin\left(\Omega_0 n - \frac{\Omega_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

であるので,

$$w[n-1] = \frac{1}{2}(x[n-1] - x[n-2]) = \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \sin\left(\Omega_0(n-1) - \frac{\Omega_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

となる. 従って, $\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega_0}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} y[n] &= -\frac{1}{2}(w[n] - w[n-1]) \\ &= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \{ \sin(\Omega_0 n + \phi) - \sin(\Omega_0 n - \Omega_0 + \phi) \} \\ &= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \{ \sin(\Omega_0 n + \phi) + \sin(-\Omega_0 n - \phi + \Omega_0) \} \\ &= -\sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \left\{ \sin\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \cos\left(\Omega_0 n + \phi - \frac{\Omega_0}{2}\right) \right\} \\ &= -\sin^2\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \sin\left(\Omega_0 n + \phi - \frac{\Omega_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin^2\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \sin(\Omega_0 n - \Omega_0 + \pi) \\ &= \sin^2\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \sin(\Omega_0 n - \Omega_0) \end{aligned}$$

となる. 上式より, $A = \sin^2\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)$, $B = -\Omega_0$ を得る.

(v) $q[n] = x[n-N] = \sin(\Omega_0(n-N)) = \sin(\Omega_0 n - \Omega_0 N)$

(vi) 振幅特性

振幅特性は, 入力信号を様々な角周波数の成分の重ね合わせとみなしたとき, 各成分がシステムによりどの程度増幅/減衰するかを表している. あるシステムの振幅特性が $|H(\Omega)|$ で与えられるとき, 入力信号に含まれる角周波数 Ω の成分の振幅は $|H(\Omega)|$ 倍されて出力される. 従って, $|H(\Omega)| = 1$ となるような角周波数の成分の振幅はそのシステムでは変化しない. 一方, $|H(\Omega)| = 0$ となるような角周波数の成分は振幅が 0 倍され, 完全に遮断される.

位相特性

位相特性は, 同じく入力信号を様々な角周波数の成分の重ね合わせとみなしたとき, 各成分の位相がシステムによりどの程度遅れるかを表している. あるシステムの位相特性が $\angle H(\Omega)$ で与えられるとき, 入力信号に含まれる角周波数 Ω の成分の位相は $-\angle H(\Omega)$ [rad] 遅れる ($\angle H(\Omega)$ [rad] 進む). なお, 位相の遅れは時間的な遅延と考えることもでき, $-\angle H(\Omega)$ [rad] の位相遅れは 1 単位時間 $\times \left(-\frac{\angle H(\Omega)}{\Omega}\right)$ 分の時間遅延に相当する. 従って, 位相特性は, システムが入力信号に含まれる各成分に対しどの程度の遅延を生じさせるかを表すものと捉えることもできる.

(9) (i) $x[n], y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z)$ とおくと,

$$H(z) = \frac{4z^2}{4bz^2 - 4bz - a + b} = \frac{4}{4b - 4bz^{-1} - (a-b)z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

が成り立つ。上式より

$$4bY(z) - 4bY(z)z^{-1} - (a-b)Y(z)z^{-2} = 4X(z)$$

であり, すなわち

$$Y(z) = \frac{1}{b}X(z) + Y(z)z^{-1} + \frac{a-b}{4b}Y(z)z^{-2}$$

である。上式の両辺を逆 z 変換することにより

$$y[n] = \frac{1}{b}x[n] + y[n-1] + \frac{a-b}{4b}y[n-2]$$

を得る。

(ii) L が BIBO 安定であるための必要十分条件は $H(z)$ の極が全て単位円内に含まれることであり, この条件が満たされる a の範囲を求めればよい。 $b = 1$ のとき,

$$H(z) = \frac{4z^2}{4z^2 - 4z - a + 1}$$

である。従って, 極は $4z^2 - 4z - a + 1 = 0$ の解となる。これを求めると,

$$\begin{aligned} 4z^2 - 4z - a + 1 = 0 &\iff (2z - 1)^2 - a = 0 \\ &\iff \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

より, $a \geq 0$ のとき $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{a}}{2}$ となる。より原点から遠い極は $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2}$ であり, これが単位円内に含まれるための条件は

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2} < 1 \iff a < 1$$

である。一方, $a < 0$ のとき, 極は $z = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{-a}}{2}$ であり, これらが単位円内に含まれるための条件は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-a}}{2}\right)^2 < 1^2 &\iff 1 - a < 4 \\ &\iff a > -3 \end{aligned}$$

である。以上より, $-3 < a < 1$ の範囲において L は BIBO 安定となる。

(iii) $a = b$ のとき,

$$H(z) = \frac{4z^2}{4bz^2 - 4bz} = \frac{z}{bz - b} = \frac{1}{2b} \cdot \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

である。従って, L の周波数応答は, 上式に $z = e^{j\Omega}$ を代入し

$$H(\Omega) = \frac{1}{2b} \cdot \frac{2}{1 - e^{-j\Omega}}$$

と求まる。ここで,

$$\frac{1 - e^{-j\Omega}}{2} = j \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2j} e^{-j\frac{\Omega}{2}} = \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{j\frac{\pi-\Omega}{2}}$$

であることから, 上式の $H(\Omega)$ は

$$H(\Omega) = \frac{1}{2b \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{j\frac{\Omega-\pi}{2}}$$

と展開できる (問題文の条件より $b > 0$)。上式より, 振幅特性は $|H(\Omega)| = \frac{1}{2b \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$, 位相特性は $\angle H(\Omega) = \frac{\Omega-\pi}{2}$ となる。

(iv) $a = \frac{1}{9}, b = 1$ のとき,

$$H(z) = \frac{4z^2}{4z^2 - 4z + \frac{8}{9}} = \frac{z^2}{z^2 - z + \frac{2}{9}} = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{2}{3})}$$

である。よって、 $\frac{H(z)}{z}$ は

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{z - \frac{2}{3}}$$

のように部分分数に展開できる。ただし、

$$\begin{aligned} A &= H(z)|_{z=0} = 0 \\ B &= \left(z - \frac{1}{3}\right) \frac{H(z)}{z} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{z}{z - \frac{2}{3}} \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = -1 \\ C &= \left(z - \frac{2}{3}\right) \frac{H(z)}{z} \Big|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \Big|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 2 \end{aligned}$$

である。従って、

$$H(z) = -\frac{z}{z - \frac{1}{3}} + 2\frac{z}{z - \frac{2}{3}} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}$$

となる。ここで、 L は因果的であるから、そのインパルス応答 $h[n]$ の左側 z 変換は 0 であり、右側 z 変換が $H(z)$ と一致しなければならない。このとき、 $H(z)$ の ROC は極の外側、すなわち $|z| > \frac{2}{3}$ となる。このことを踏まえて上記の $H(z)$ を逆 z 変換することにより、

$$h[n] = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

を得る。

第 10 章 演習問題 解答

- (1) (i) 加算器 A_2 における入出力関係： $p_2[n] = 3x[n] + \frac{1}{2}y[n] + p_3[n - 1]$
 加算器 A_3 における入出力関係： $p_3[n] = 2x[n] + \frac{1}{2}y[n]$

(ii) 次の通り。

$$y[n] = x[n] + 3x[n - 1] + 2x[n - 2] + \frac{1}{2}y[n - 1] + \frac{1}{2}y[n - 2]$$

- (iii) $\mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$, $\mathcal{Z}[y[n]] = Y(z)$ として問い (ii) の式の両辺を z 変換することにより

$$Y(z) = X(z) + 3X(z)z^{-1} + 2X(z)z^{-2} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-2}$$

を得る。整理すると

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)Y(z) = (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2})X(z)$$

となり、従って伝達関数は

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{(z + 1)(z + 2)}{(z - 1)(z + \frac{1}{2})}$$

となる (S_1 は因果的であるので、ROC は $|z| > 1$)。極は $z = 1, -\frac{1}{2}$ 、零点は $z = -1, -2$ 。

(iv) 問題文の $y[n]$ は $y[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$ と書ける. 従って, これを z 変換すると

$$Y(z) = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

となる (ROC は $|z| > \frac{1}{2}$). ここで, $Y(z) = H(z)X(z)$ より,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})} \\ &= \frac{1 - z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})} = \frac{-2}{1 + z^{-1}} + \frac{3}{1 + 2z^{-1}} \end{aligned}$$

である. $Y(z)$ と $H(z)$ の ROC から, $X(z)$ の ROC は $|z| > 2$ でなければならないことを考慮して,

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = -2(-1)^n y[n] + 3(-2)^n u[n] = \{3(-2)^n - 2(-1)^n\}u[n]$$

(v) 複数のデジタルフィルタを従属接続した場合, 全体の伝達関数は, 各フィルタの伝達関数の積となる. 従って, S の伝達関数は

$$H_S(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{z+2}{z+\frac{1}{2}}$$

と求まる. 上式に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより, 周波数特性は

$$H_S(\Omega) = \frac{e^{j\Omega} + 2}{e^{j\Omega} + \frac{1}{2}} = 2e^{j\Omega} \frac{e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}}{e^{j\Omega} + \frac{1}{2}}$$

となる. ここで, $|e^{j\Omega}| = 1$ および $|e^{j\Omega} + \frac{1}{2}| = |e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}|$ より, ゲインは

$$|H_S(\Omega)| = 2 |e^{j\Omega}| \frac{|e^{-j\Omega} + \frac{1}{2}|}{|e^{j\Omega} + \frac{1}{2}|} = 2$$

となり, Ω によらず (すなわち全ての周波数にわたって) 一定値をとる.

(2) (i) $x[n]$ と $y[n]$ は入出力差分方程式

$$y[n] = x[n-1] - cx[n-2] + (a+b)y[n-1] - aby[n-2]$$

により関係づけられる. $\mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$, $\mathcal{Z}[y[n]] = Y(z)$ として上式の両辺を z 変換し, さらに移項して整理すると

$$(1 - (a+b)z^{-1} + abz^{-2})Y(z) = (z^{-1} - cz^{-2})X(z)$$

となり, 従って伝達関数は

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - cz^{-2}}{1 - (a+b)z^{-1} + abz^{-2}} = \frac{z^{-1}(1 - cz^{-1})}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} = \frac{z - c}{(z - a)(z - b)}$$

と求まる (このフィルタは因果的であるので, ROC は $|z| > \max(|a|, |b|)$).

(ii) 問い (i) の $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1}{z-b} = \frac{a-c}{a(a-b)} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} - 1 \right) + \frac{b-c}{b(b-a)} \left(\frac{1}{1-bz^{-1}} - 1 \right)$$

と表せる. この $H(z)$ を逆 z 変換することにより, インパルス応答は

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \frac{a-c}{a(a-b)} (a^n u[n] - \delta[n]) + \frac{b-c}{b(b-a)} (b^n u[n] - \delta[n]) \\ &= \frac{a-c}{a-b} a^{n-1} u[n-1] + \frac{b-c}{b-a} b^{n-1} u[n-1] \end{aligned}$$

と求まる. 上式より, $\lim_{n \rightarrow \infty} h[n] = 0$ となるのは明らかに $|a| < 1$ かつ $|b| < 1$ のとき.

(iii) まず, $w_a[n] = a^{n-1}u[n-1] * e^{j\Omega n}u[n]$ について考える.

$$w_a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{n-k-1}u[n-k-1]e^{j\Omega k}u[k] = a^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k}u[n-1-k]e^{j\Omega k}$$

より, $n \leq 0$ のとき $w_a[n] = 0$ である. 一方, $n \geq 1$ のとき,

$$w_a[n] = a^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (a^{-1}e^{j\Omega})^k = a^{n-1} \frac{1 - (a^{-1}e^{j\Omega})^n}{1 - a^{-1}e^{j\Omega}} = \frac{a^{n-1} - a^{-1}e^{j\Omega n}}{1 - a^{-1}e^{j\Omega}} = \frac{a^n - e^{j\Omega n}}{a - e^{j\Omega}}$$

である. 以上をまとめると

$$w_a[n] = \frac{a^n - e^{j\Omega n}}{a - e^{j\Omega}} u[n]$$

と書ける. ここで, 問い(ii)で求めた $h[n]$ を用いて $y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * e^{j\Omega n}u[n]$ と表せるので,

$$y[n] = \frac{a-c}{a-b}w_a[n] + \frac{b-c}{b-a}w_b[n] = \left(\frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{a^n - e^{j\Omega n}}{a - e^{j\Omega}} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{b^n - e^{j\Omega n}}{b - e^{j\Omega}} \right) u[n]$$

となる. ところで, 問い(ii)の条件が成り立つとき, 十分時間が経過すれば(すなわち $n \rightarrow \infty$), $a^n \rightarrow 0$ かつ $b^n \rightarrow 0$ である. そのとき,

$$\begin{aligned} y[n] &\rightarrow \left(\frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{-e^{j\Omega n}}{a - e^{j\Omega}} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{-e^{j\Omega n}}{b - e^{j\Omega}} \right) u[n] \\ &= \left(\frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{-1}{a - e^{j\Omega}} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{-1}{b - e^{j\Omega}} \right) e^{j\Omega n} u[n] \\ &= \left(\frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1}{e^{j\Omega} - a} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1}{e^{j\Omega} - b} \right) x[n] \end{aligned}$$

であるが, 問い(i)の $H(z)$ に $z = e^{j\Omega}$ を代入すると

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{1}{e^{j\Omega} - a} + \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1}{e^{j\Omega} - b}$$

となるので, 結局 $y[n] \rightarrow H(e^{j\Omega})x[n]$ が導かれる.

(3) (i) このフィルタを表す入出力差分方程式は

$$y[n] = b_3x[n] + b_2x[n-1] + b_1x[n-2] + b_0x[n-3] - a_2y[n-1] - a_1y[n-2] - a_0y[n-3]$$

であり, 上式の両辺を z 変換して整理することにより

$$(1 + a_2z^{-1} + a_1z^{-2} + a_0z^{-3})Y(z) = (b_3 + b_2z^{-1} + b_1z^{-2} + b_0z^{-3})X(z)$$

を得る. これより

$$Y(z) = \frac{b_3 + b_2z^{-1} + b_1z^{-2} + b_0z^{-3}}{1 + a_2z^{-1} + a_1z^{-2} + a_0z^{-3}} X(z) = \frac{b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0}{z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0} X(z)$$

であり, したがって, 伝達関数は

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0}{z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}$$

となる.

(ii) FIR フィルタの条件は, 伝達関数が z^{-1} の多項式(項の数は有限)で表現できることである. 従って, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$ のとき, S は FIR フィルタとなる.

(iii) 問題文の条件においては,

$$H(z) = \frac{z^3 + z^2 + z}{z^3 + 2z^2 + 2z} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1)^2 + 1}$$

であり, 分母の根は $(z + 1)^2 = -1$ の解, すなわち $z = -1 \pm j$ となる. これは何れも単位円の外側に位置するため ($|-1 \pm j| = \sqrt{2} > 1$), BIBO 安定とはならない.

(iv) 問題文の条件においては,

$$H(z) = \frac{3z^3 - z^2 - z}{z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}} = \frac{z(3z^2 - z - 1)}{(z - 1)(z + 1)(z - \frac{1}{2})} = \frac{3 - z^{-1} - z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

である. 上式は,

$$H(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

のように部分分数展開でき, A, B, C は留数定理より $A = B = C = 1$ と求まる. ここで, S は因果的であり $H(z)$ の ROC は $|z| > 1$ となる点に注意して $H(z)$ を逆 z 変換することにより,

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = 1^n u[n] + (-1)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left\{1 + (-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n]$$

(v) 問題文の条件においては,

$$H(z) = \frac{z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}}{z^3 - \frac{1}{2}z^2} = \frac{(z + 1)(z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})}{z^2(z - \frac{1}{2})} = \frac{(z + 1)(z + 1)(z - \frac{1}{2})}{z^2(z - \frac{1}{2})} = (1 + z^{-1})^2$$

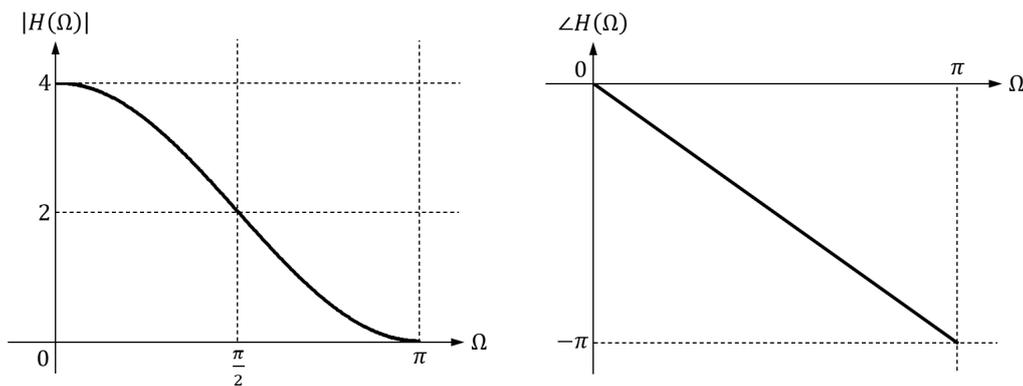
である. 上式に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより, S の周波数特性は

$$H(\Omega) = (1 + e^{-j\Omega})^2 = \left(2 \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)^2 = 4 \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{j(-\Omega)}$$

と求まる. したがって,

$$|H(\Omega)| = 4 \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \angle H(\Omega) = -\Omega$$

である. これを図示すると下図のようになる.



(4) (i) S を表す入出力方程式は

$$y[n] = \frac{2}{a}x[n] + \left(a + \frac{1}{a}\right)y[n - 1] - y[n - 2]$$

であり, この両辺を z 変換して整理することにより, 伝達関数は

$$H(z) = \frac{\frac{2}{a}}{1 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\frac{2}{a}z^2}{z^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z + 1} = \frac{\frac{2}{a}z^2}{(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right)}$$

と求まる.

(ii) 問い (i) の結果より, 極は $z = a, \frac{1}{a}$ の二つ. $|a|$ と $|\frac{1}{a}|$ を同時に 1 未満にする定数 a は存在しない (どちらか一方は必ず単位円上またはその外側に位置する) ので, S は BIBO 安定ではない.

(iii) z 変換の定義式に従って,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^{-0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-2)z^{-n} = 1 - 2\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{z-1}{z-1} - 2\frac{1}{z-1} = \frac{z-3}{z-1}$$

と求まる. ROC は $|z| > 1$.

(iv) $y[n]$ の z 変換を $Y(z)$ とすると, $Y(z) = H(z)X(z)$ であるので, $a = 3$ のとき,

$$Y(z) = \frac{2}{3} \frac{z^2}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} \frac{z-3}{z-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}}$$

となる. $X(z)$ の ROC が $|z| > 1$, $H(z)$ の ROC が $|z| > 3$ であることから, $Y(z)$ の ROC は縁領域の外側, すなわち $|z| > 1$ でなければならないことに注意して, 上式を逆 z 変換することにより,

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[n] = \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\} u[n]$$

を得る.

(5) (i) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ より,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + b_1z + b_0}{z^2 + a_1z + a_0} \iff Y(z)\{1 + a_1z^{-1} + a_0z^{-2}\} = X(z)\{1 + b_1z^{-1} + b_0z^{-2}\}$$

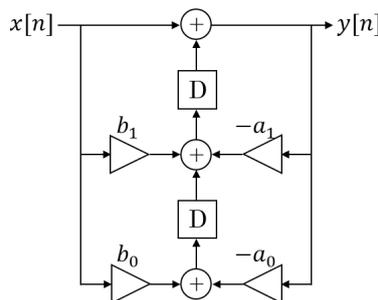
である. 上式を整理すると,

$$Y(z) = X(z) + b_1X(z)z^{-1} + b_0X(z)z^{-2} - a_1Y(z)z^{-1} - a_0Y(z)z^{-2}$$

となり, この両辺を逆 z 変換することにより

$$y[n] = x[n] + b_1x[n-1] + b_0x[n-2] - a_1y[n-1] - a_0y[n-2]$$

を得る. これを図示すると次の通り.



(ii) $a_1 = b_1 = 0$ のとき,

$$H(z) = \frac{z^2 + b_0}{z^2 + a_0}$$

であり, $a_0 \neq b_0$ であることから, 上式の分子と分母は共通因数を持たないため, 零点は $z = \pm j\sqrt{b_0}$, 極は $z = \pm j\sqrt{a_0}$ となる. S が BIBO となるためには, 極が全て単位円内に存在すれば良いため, $|a_0| < 1$ がその条件となる.

(iii) 問題文の条件においては,

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

となる. 上式を部分分数展開すると

$$H(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

となる. S が因果的であることから $H(z)$ の ROC は縁領域の外側 ($|z| > 1$) とならなければならない点に注意して, 上式を逆 z 変換することにより,

$$h[n] = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{3}{2} u[n] = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\} u[n]$$

を得る.

(iv) 問題文の条件においては,

$$H(z) = \frac{z^2 + z}{z^2} = 1 + z^{-1}$$

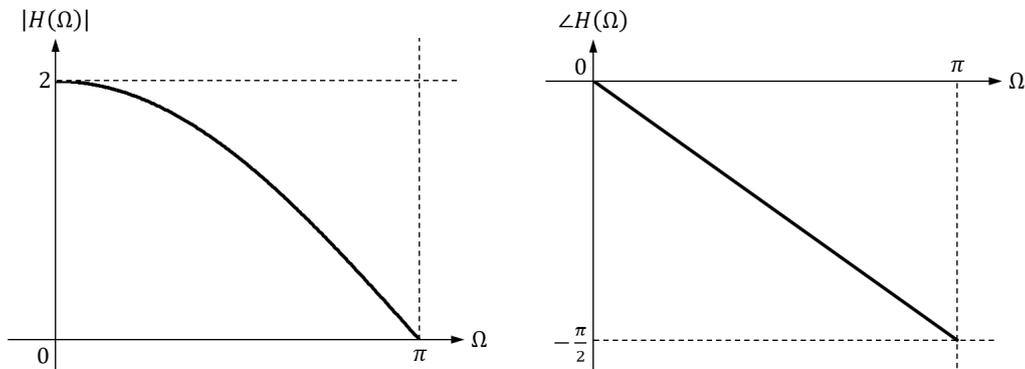
となる. 上式に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより, 周波数応答は

$$H(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} = 2 \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} e^{-j\frac{\Omega}{2}} = 2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) e^{j\left(-\frac{\Omega}{2}\right)}$$

と求まる. したがって,

$$|H(\Omega)| = 2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad \angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2}$$

である. これを図示すると下図のようになる.



(6) (i) S_1 の入出力差分方程式は

$$y[n] = 2a^2x[n] + ax[n-1] + \frac{1}{2}x[n-2] + \frac{1}{2}ay[n-1] + \frac{1}{2}a^2y[n-2]$$

と表される. 上式の両辺を z 変換して整理すると

$$\{2 - az^{-1} - a^2z^{-2}\} Y(z) = \{4a^2 + 2az^{-1} + z^{-2}\} X(z)$$

となる. 従って,

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4a^2 + 2az^{-1} + z^{-2}}{2 - az^{-1} - a^2z^{-2}} = \frac{4a^2z^2 + 2az + 1}{2z^2 - az - a^2}$$

(ii) $H_1(z)$ は z の有理関数であるから、その極は分母 $2z^2 - az - a^2$ の根として求められる。

$$2z^2 - az - a^2 = (2z + a)(z - a)$$

と因数分解できるので、 $2z^2 - az - a^2 = 0$ の解は $z = a, -\frac{1}{2}a$ となる。従って、 $H_1(z)$ の極は

$$z = a, -\frac{1}{2}a$$

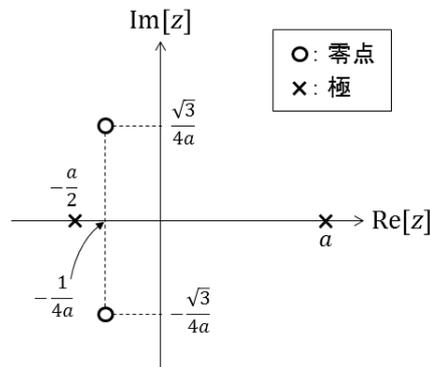
である。一方、零点は、分子 $4a^2z^2 + 2az + 1$ の根として求められる。 $4a^2z^2 + 2az + 1 = 0$ とおくと、その解は

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4a^2 \cdot 1}}{4a^2} = \frac{-a \pm \sqrt{3}aj}{4a^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{4a}$$

と求まる ($\because a > 0$)。すなわち、 $H_1(z)$ の零点は

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{4a}$$

である。これらの極・零点を図示すると下図のようになる。



(iii) 入力 $x[n]$ を S_1 に通した後の出力を $y[n]$ 、それを更に S_2 に通した後の最終出力を $w[n]$ とする。また、 $x[n], y[n], w[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z), W(z)$ とする。伝達関数の定義式から、

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \iff H_1(z)X(z) = Y(z) \tag{15}$$

$$H_2(z) = \frac{W(z)}{Y(z)} \iff H_2(z)Y(z) = W(z) \tag{16}$$

が得られる。式 (15) を式 (16) に代入することで次式を得る。

$$H_2(z)H_1(z)X(z) = W(z)$$

ここで、 S_2 は S_1 の逆システムであるので、 $w[n] = x[n]$ であり、従って $W(z) = X(z)$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} H_2(z)H_1(z)X(z) = W(z) &\iff H_2(z)H_1(z)X(z) = X(z) \\ &\iff H_2(z)H_1(z) = 1 \\ &\iff H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $H_2(z)$ は $H_1(z)$ の逆数となることが示された。

- (iv) 問い (iii) の結果から, $H_2(z)$ の極は $H_1(z)$ の零点に一致する. ここで, 因果的な線形時不変システムが BIBO 安定であることの必要十分条件は, 伝達関数の全ての極が複素平面上で単位円内部に存在することである. 従って, 問い (ii) で求めた極と零点が全て単位円の内部に存在するための条件を考えればよい. H_1 について, その極 $z = a, -\frac{1}{2}a$ が単位円内部に存在するための条件は

$$\begin{aligned} |a| < 1 \text{ かつ } \left| -\frac{1}{2}a \right| < 1 &\iff a < 1 \text{ かつ } a < 2 \quad (\because a > 0) \\ &\iff 0 < a < 1 \end{aligned} \tag{17}$$

である. 一方, H_2 について, その極 $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{4a}$ が単位円内部に存在するための条件は

$$\begin{aligned} \left| \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{4a} \right| < 1 &\iff \sqrt{\left(\frac{1}{4a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4a}\right)^2} < 1 \\ &\iff \frac{1}{2a} < 1 \quad (\because a > 0) \\ &\iff \frac{1}{2} < a \end{aligned} \tag{18}$$

である. 式 (17)(18) より, S_1 と S_2 が共に BIBO 安定となるための条件は

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

となる.

- (7) (i) まず S_M について, 入力信号 $x[n]$ および出力信号 $y[n]$ の z 変換をそれぞれ $X(z), Y(z)$ とおくと, 所与の入出力差分方程式の両辺を z 変換することにより

$$Y(z) = \frac{1}{2}(X(z) + X(z)z^{-1}) = \frac{1+z^{-1}}{2}X(z)$$

を得る. 上式より, 伝達関数 $H_M(z)$ は

$$H_M(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

となり, これに $z = e^{j\Omega}$ を代入して絶対値をとることにより振幅特性 $|H_M(\Omega)|$ は

$$|H_M(\Omega)| = \left| \frac{1+e^{-j\Omega}}{2} \right| = \left| \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \right| \cdot \left| e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right| = \left| \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right|$$

と求まる. これは $0 \leq \Omega \leq \pi$ の範囲では単調減少であるため, 高周波域ほど減衰しやすいことが分かる. 従って, S_M は低周波成分を残し高周波成分のみを低減するのに適したフィルタ, すなわちローパスフィルタであると言える.

S_D についても, 同様に入出力差分方程式の両辺を z 変換することにより

$$Y(z) = \frac{1}{2}(X(z) - X(z)z^{-1}) = \frac{1-z^{-1}}{2}X(z)$$

を得る. 上式より伝達関数 $H_D(z)$ は

$$H_D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{2}$$

となり, これに $z = e^{j\Omega}$ を代入して絶対値をとることにより振幅特性 $|H_D(\Omega)|$ は

$$|H_D(\Omega)| = \left| \frac{1-e^{-j\Omega}}{2} \right| = \left| \frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2j} \right| \cdot \left| je^{-j\frac{\Omega}{2}} \right| = \left| \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right|$$

と求まる. これは $0 \leq \Omega \leq \pi$ の範囲では単調増加であるため, 低周波域ほど減衰しやすいことが分かる. 従って, S_D は高周波成分を残し低周波成分のみを低減するのに適したフィルタ, すなわちハイパスフィルタであると言える.

- (ii) 複数のフィルタを縦続接続した場合、全体の伝達関数は個々のフィルタの伝達関数の積で表される。従って、 S の伝達関数を $H(z)$ とすると、

$$H(z) = 2H_M(z)H_D(z) = 2 \cdot \frac{1+z^{-1}}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{2} = \frac{1-z^{-2}}{2}$$

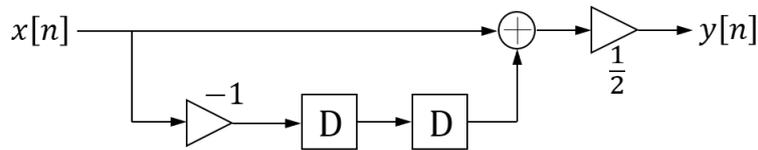
となる。上式より、 S の入出力関係は z 領域において

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{2}X(z) = \frac{1}{2}(X(z) - X(z)z^{-2})$$

と表され、この両辺を逆 z 変換することにより、時間領域における式は

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-2])$$

と求まる。これをブロックダイアグラムで表現すると下図のようになる。



- (iii) 問い(ii)で求めた $H(z)$ に $z = e^{j\Omega}$ を代入することにより、 L の周波数応答は

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-2j\Omega}}{2} = \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{2j} j e^{-j\Omega} = \sin(\Omega) e^{j(\frac{\pi}{2} - \Omega)}$$

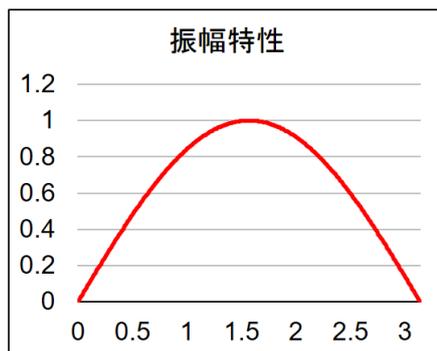
と求まる。従って、振幅特性は

$$|H(\Omega)| = |\sin(\Omega)|$$

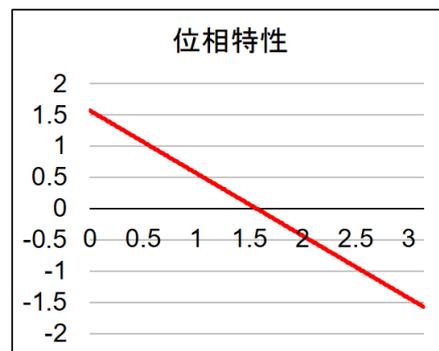
となり、位相特性は

$$\angle H(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \Omega$$

となる。これらを図示すると次のようになる。



(a) 振幅特性



(b) 位相特性

上図(a)より、 S は $\Omega = \frac{\pi}{2}$ 付近の中周波成分をほぼそのまま通過させ、 $\Omega = 0$ 付近の低周波成分と $\Omega = \pi$ 付近の高周波成分はともに減衰させるフィルタとして機能することが分かる。これに類するフィルタは、例えば画像処理においてノイズ(高周波成分)を低減しつつエッジ(中~高周波成分)を抽出したい場合などに使用される。

(8) まず、所与の $H_d(\Omega)$ を逆離散時間フーリエ変換 (IDTFT) することにより、これに対応するインパルス応答 $h_d[n]$ を得る。IDTFT の定義式より

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega(\frac{M-1}{2})} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega(n-\frac{M-1}{2})} d\Omega$$

であるので、 M : 奇数かつ $n = \frac{M-1}{2}$ のとき $h_d[n] = \frac{\Omega_c}{\pi}$ であり、それ以外のとき ($n \neq \frac{M-1}{2}$ のとき)

$$h_d[n] = \frac{\sin \Omega_c \left(n - \frac{M-1}{2} \right)}{\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right)}$$

となる。上式の $n \rightarrow \frac{M-1}{2}$ における極限值は $\frac{\Omega_c}{\pi}$ なので、以下、便宜上 $n = \frac{M-1}{2}$ の場合もまとめて上式で表すことにする。上記の $h_d[n]$ は $n = \frac{M-1}{2}$ について対称であるが、明らかに因果性がなく、無限時間継続する。そこで、これに長さ M の方形窓を乗ずることにより、フィルタ長 M の FIR フィルタ

$$h[n] = \frac{\sin \Omega_c \left(n - \frac{M-1}{2} \right)}{\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right)} \quad \left(0 \leq n \leq M-1 \right) \quad (19)$$

を得る。

第11章 演習問題 解答

(1) UU^T の k 行 l 列成分は

$$(UU^T)_{kl} = \frac{C_k C_l}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \cos \frac{(k-l)(2n+1)\pi}{2N} + \cos \frac{(k+l)(2n+1)\pi}{2N} \right\}$$

と書ける。ここで、 $p = k-l$ または $p = k+l$ とおき、

$$A_p = \sum_{n=0}^{N-1} \cos \frac{p(2n+1)\pi}{2N}$$

について考える ($0 \leq k, l < N$ より $-2N < p < 2N$)。虚数単位を j として

$$\cos \frac{p(2n+1)\pi}{2N} = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{p(2n+1)\pi}{2N}} + e^{-j\frac{p(2n+1)\pi}{2N}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{p\pi}{2N}} e^{j\frac{pn\pi}{N}} + e^{-j\frac{p\pi}{2N}} e^{-j\frac{pn\pi}{N}} \right)$$

であるので、

$$S_p = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{pn\pi}{N}}, \quad T_p = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{pn\pi}{N}}$$

とおくことにより

$$A_p = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{p\pi}{2N}} S_p + e^{-j\frac{p\pi}{2N}} T_p \right)$$

と表せる。 $p \neq 0$ のとき、

$$S_p = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{pn\pi}{N}} = \frac{1 - e^{jp\pi}}{1 - e^{j\frac{p\pi}{N}}} = \begin{cases} 0 & (p : \text{偶数}) \\ \frac{2}{1 - e^{j\frac{p\pi}{N}}} & (p : \text{奇数}) \end{cases}$$

であり、同様に

$$T_p = \begin{cases} 0 & (p : \text{偶数}) \\ \frac{2}{1 - e^{-j\frac{p\pi}{N}}} & (p : \text{奇数}) \end{cases}$$

であるので、 p が偶数なら $A_p = 0$ である。また、 p が奇数であっても

$$A_p = \frac{e^{j\frac{p\pi}{2N}}}{1 - e^{j\frac{p\pi}{N}}} + \frac{e^{-j\frac{p\pi}{2N}}}{1 - e^{-j\frac{p\pi}{N}}} = \frac{1}{e^{-j\frac{p\pi}{2N}} - e^{j\frac{p\pi}{2N}}} + \frac{1}{e^{j\frac{p\pi}{2N}} - e^{-j\frac{p\pi}{2N}}} = 0$$

となり，結局 $p \neq 0$ のとき $A_p = 0$ が導かれる．一方， $p = 0$ のとき，明らかに $A_p = A_0 = N$ である．以上より， $k \neq l$ においては $k - l \neq 0$ かつ $k + l \neq 0$ であるため ($0 \leq k, l < N$ であることに注意)，

$$(UU^T)_{kl} = \frac{C_k C_l}{2}(A_{k-l} + A_{k+l}) = 0$$

であることが分かる．次に $k = l \neq 0$ のとき， $k - l = 0$ かつ $k + l \neq 0$ であるため，

$$(UU^T)_{kl} = \frac{C_k C_l}{2}(A_{k-l} + A_{k+l}) = \frac{1}{2} C_k C_l A_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \right)^2 N = 1$$

である．最後に $k = l = 0$ のとき， $k - l = k + l = 0$ であるため，

$$(UU^T)_{kl} = \frac{C_k C_l}{2}(A_{k-l} + A_{k+l}) = C_0^2 A_0 = \left(\sqrt{\frac{1}{N}} \right)^2 N = 1$$

となる．以上より， U は直交行列であることが示された．

- (2) m, n, k, l を整数として， $\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n)$ と $\psi_{k,l}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k t - l)$ の内積を考える．一般性を失うことなく $m \geq k$ を仮定できる．また，ハール関数は実関数であり $\overline{\psi(t)} = \psi(t)$ である．以上より，

$$\begin{aligned} \langle \psi_{m,n}(t), \psi_{k,l}(t) \rangle &= 2^{\frac{m+k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^m t - n) \psi(2^k t - l) dt \\ &= 2^{\frac{m+k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{m-k}(2^k t - l) + 2^{m-k}l - n) \psi(2^k t - l) dt \\ &= 2^{\frac{m+k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{m-k}\tau + 2^{m-k}l - n) \psi(\tau) 2^{-k} d\tau \\ &= 2^{\frac{m-k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p\tau + q) \psi(\tau) d\tau \\ &= \sqrt{p} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(p\tau + q) d\tau - \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(p\tau + q) d\tau \right\} \triangleq S(p, q) \end{aligned}$$

と計算できる．但し， $\tau = 2^k t - l$ として変数変換し，さらに $p = 2^{m-k}$ ， $q = 2^{m-k}l - n$ とおいた．このとき， $m \geq k$ より， p, q は共に整数，かつ p は1以上である．ここで，改めて $t = p\tau + q$ とおきなおして変数を変換すると，

$$S(p, q) = \frac{\sqrt{p}}{p} \left\{ \int_q^{q+\frac{p}{2}} \psi(t) dt - \int_{q+\frac{p}{2}}^{q+p} \psi(t) dt \right\}$$

であるが， p, q が共に整数であることに注意すると， $p \geq 2$ においては， $q, q + \frac{p}{2}, q + p$ はどれも整数となる．従ってこのとき，(a) $1 \leq q$ ，(b) $q \leq 0 < 1 \leq q + \frac{p}{2}$ ，(c) $q + \frac{p}{2} \leq 0 < 1 \leq q + p$ ，(d) $q + p \leq 0$ の4通りしかあり得ない．(a) または (d) の場合，明らかに $S(p, q) = 0$ である．(b) の場合，

$$S(p, q) = \frac{\sqrt{p}}{p} \int_0^1 \psi(t) dt = \frac{\sqrt{p}}{p} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \right\} = 0$$

であり，(c) の場合も同様に

$$S(p, q) = -\frac{\sqrt{p}}{p} \int_0^1 \psi(t) dt = 0$$

である．以上より， $p \geq 2$ ，すなわち $m \neq k$ においては常に $S(p, q) = 0$ である．よって，以降では， $m = k$ すなわち $p = 1$ の場合を考える．このとき， $q = l - n$ であり，また，

$$S(p, q) = S(1, q) = \int_q^{q+\frac{1}{2}} \psi(t) dt - \int_{q+\frac{1}{2}}^{q+1} \psi(t) dt$$

である．再度， q が整数であることに注意すると， $q \neq 0$ すなわち $l \neq n$ においては，明らかに $S(1, q) = 0$ である．そこで最後に， $q = 0$ すなわち $l = n$ の場合を考える．この場合は

$$S(1, q) = S(1, 0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

と計算できる。以上より、内積 $\langle \psi_{m,n}(t), \psi_{k,l}(t) \rangle$ は $m = k$ かつ $n = l$ のときのみ 1、それ以外のときは 0 であることが分かり、正規直交系をなすことが示された。

第12章 演習問題 解答

- (1) 線画やイラストの背景部と前景部の境界部分（エッジ部分）は空間周波数が高いと考えられる。DCT ベースの JPEG で圧縮率を上げるとエッジ部分にモスキートノイズが発生する。
- (2) DFT は有限の信号定義区間（2次元の画像領域）を周期として無限区間に展開した信号をフーリエ変換するのであるが、区間の接続部分で不連続部分が生じる。一方、DCT は、信号定義区間を上下左右の鏡像画像を周期的に展開したものをフーリエ変換するものと解釈できる。DFT では、もとの画像にはない不連続部分に起因する高周波成分が発生し、低周波成分への集中が DCT より少なくなる。従って、風景画像に対する圧縮率は DFT の方が悪くなると考えられる。
- (3) 圧縮方式に関しては、大差ない。MPEG-4 では、音声、動画のデータに対してオブジェクト符号化の考え方を導入した点が MPEG-2 と異なる。

第13章 演習問題 解答

- (1) 入力層、中間層（1層目の出力）、出力層（2層目の出力）のパーセプトロンの値をそれぞれ $x[n]$, $\xi[n]$, $y[n]$ とおく。1層目、2層目ともに $S = 1$ かつ $P = \frac{K-1}{2}$ を満たすので（ K, P, S はカーネルサイズ、パディングサイズ、ストライド）、パーセプトロン数は全ての層で同一である。これを N とおき、 $n < 0$ または $n \leq N$ のとき $x[n] = \xi[n] = y[n] = 0$ と考える。また、1層目、2層目のカーネルをそれぞれ $\hat{h}_1[n]$, $\hat{h}_2[n]$ とおく。これらのカーネルサイズは各々 $2k + 1$, $2l + 1$ であるので、

$$\hat{h}_1[n] \begin{cases} \neq 0 & (-k \leq n \leq k) \\ = 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \hat{h}_2[n] \begin{cases} \neq 0 & (-l \leq n \leq l) \\ = 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である。活性化関数を適用しない条件下では、

$$\xi[n] = \sum_{i=-k}^k \hat{h}_1[i] x[n-i] = \hat{h}_1[n] * x[n]$$

かつ

$$y[n] = \sum_{m=-l}^l \hat{h}_2[m] \xi[n-m] = \hat{h}_2[n] * \xi[n]$$

であるので、畳込みの結合側より、

$$y[n] = \hat{h}_2[n] * (\hat{h}_1[n] * x[n]) = (\hat{h}_2[n] * \hat{h}_1[n]) * x[n]$$

が成り立つ。ここで $\hat{h}[n] = \hat{h}_2[n] * \hat{h}_1[n]$ とおくと、

$$y[n] = \hat{h}[n] * x[n] = \sum_{i=-k-l}^{k+l} \hat{h}[i] x[n-i]$$

となる。これは、 $\hat{h}[n]$ をカーネルとする単一の畳込み層（カーネルサイズ $2k + 2l + 1$ 、パディングサイズ $k + l$ 、ストライド 1）を適用することと等価である。

(2) (i) 次の通り.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) \mathbf{y} の i 次元目を $y(\nu_i)$ とする. まず $i = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} y(\nu_1) &= x(\nu_1) - x(\nu_2) = \cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right) - \cos\left(\frac{3k\pi}{2N}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k\pi + 3k\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k\pi - 3k\pi}{2N}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{-k\pi}{2N}\right) \\ &= 4 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) x(\nu_1) \end{aligned}$$

となる. 次に, $i = N$ のとき,

$$\begin{aligned} y(\nu_N) &= x(\nu_N) - x(\nu_{N-1}) = \cos\left(\frac{(2N-1)k\pi}{2N}\right) - \cos\left(\frac{(2N-3)k\pi}{2N}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{(2N-2)k\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= -2 \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= -2(-1)^k \sin\left(-\frac{k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= -4(-1)^k \sin\left(-\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(-\frac{k\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= 4(-1)^k \cos\left(-\frac{k\pi}{2N}\right) \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= 4 \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{2N}\right) \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2N-1)k\pi}{2N}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) x(\nu_N) \end{aligned}$$

となる。最後に、 $2 \leq i < N$ のとき、

$$\begin{aligned}
 y(\nu_i) &= -x(\nu_{i-1}) + 2x(\nu_i) - x(\nu_{i+1}) \\
 &= \{x(\nu_i) - x(\nu_{i-1})\} - \{x(\nu_{i+1}) - x(\nu_i)\} \\
 &= \left\{ \cos\left(\frac{(2i-1)k\pi}{2N}\right) - \cos\left(\frac{(2i-3)k\pi}{2N}\right) \right\} - \left\{ \cos\left(\frac{(2i+1)k\pi}{2N}\right) - \cos\left(\frac{(2i-1)k\pi}{2N}\right) \right\} \\
 &= \left\{ -2 \sin\left(\frac{(i-1)k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \right\} - \left\{ -2 \sin\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \right\} \\
 &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \left\{ \sin\left(\frac{ik\pi}{N}\right) - \sin\left(\frac{(i-1)k\pi}{N}\right) \right\} \\
 &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \left\{ 2 \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ik\pi + (i-1)k\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ik\pi - (i-1)k\pi}{N}\right) \right\} \\
 &= 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \left\{ 2 \cos\left(\frac{(2i-1)k\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \right\} \\
 &= 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2i-1)k\pi}{2N}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) x(\nu_i)
 \end{aligned}$$

となる。以上をまとめると

$$\mathbf{y} = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{x}$$

である。

- (iii) 問い(ii)において $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ のときの \mathbf{x} を改めて $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N$ とおくと、問い(ii)の結果は、 $1 \leq k \leq N$ なる任意の k について

$$\mathcal{L} \mathbf{x}_k = 4 \sin^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right) \mathbf{x}_k$$

であることを意味している、すなわち、 $4 \sin^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right)$ は \mathcal{L} の固有値であり、 \mathbf{x}_k はそれに属する固有ベクトルである。ここで、 $1 \leq k \leq N$ においては $4 \sin^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right)$ は単調増加であることから $\lambda_k = 4 \sin^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right)$ であり、故に $\mathbf{x}_k \approx \boldsymbol{\gamma}_k$ である。従って、 \mathcal{G} の GFT 行列 Γ は

$$\Gamma = (\boldsymbol{\gamma}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\gamma}_N)^T = (C_1 \mathbf{x}_1 \ \dots \ C_N \mathbf{x}_N)^T$$

となる。上式において C_k は $\|C_k \mathbf{x}_k\| = 1$ を担保するための正規化係数であり、詳細な計算は省略するが、 $C_1 = \sqrt{\frac{1}{N}}$ 、 $C_k = \sqrt{\frac{2}{N}}$ ($k = 2, 3, \dots, N$) を満たす。また、 Γ の i 行 k 列成分は $C_k \mathbf{x}_k$ の i 次元目、すなわち

$$C_k \cos\left(\frac{(2i-1)(k-1)\pi}{2N}\right)$$

である。これは、インデックス変数 i, k の値の範囲 (0-based index か 1-based index か) の範囲を考慮すれば、確かに DCT 行列と一致していることが分かる。

- (3) \mathcal{G} の GFT 行列を $\Gamma = (\boldsymbol{\gamma}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\gamma}_N)$ とおく。ここで、 $\boldsymbol{\gamma}_k$ は \mathcal{L} の固有値 λ_k に属する固有ベクトルである ($k = 1, \dots, N$)。また、 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_N)^T$ とおく。 \mathcal{L} は、 Γ および $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて

$$\mathcal{L} = \Gamma \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \Gamma^T = \sum_{k=1}^N \lambda_k \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T$$

と表すことができ、更に、 Γ が直交行列 ($\Gamma^T \Gamma = I$) であることから、自然数 l に対し一般に

$$\mathcal{L}^l = \{\Gamma \text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \Gamma^T\}^l = \Gamma \{\text{diag}(\boldsymbol{\lambda})\}^l \Gamma^T = \sum_{k=1}^N \lambda_k^l \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T$$

となる。以上を踏まえて、フィルタリングの信号 \mathbf{y} について考える。 \mathbf{y} は

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^N H_k \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{x}$$

と表せるが、上式に問題文の（多項式型の） H_k を代入することにより、

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^N \left[\sum_{l=0}^m a_l \lambda_k^l \right] \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{x} = \sum_{l=0}^m a_l \left[\sum_{k=1}^N \lambda_k^l \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T \right] \mathbf{x} = \sum_{l=0}^m a_l \mathcal{L}^l \mathbf{x}$$

を得る。