第1章　章末問題解答

＜問題 1-1 ＞　次の度数法で表された角度を弧度法に直し，弧度法で表された角度を度数法に直しなさい．

(1) $45°$　(2) $330°$　(3) $\frac{7}{6}\pi$ [rad]　(4) 5 [rad]

＜解答＞

$$
\begin{aligned}
&(1)\ 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}\ [\mathrm{rad}]\\
&(2)\ 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi\ [\mathrm{rad}]\\
&(3)\ \frac{7}{6}\pi \times \frac{180}{\pi} = 210°\\
&(4)\ 5 \times \frac{180}{\pi} = \frac{900}{\pi}°
\end{aligned}
$$

＜問題 1-2 ＞　$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とするとき，次式を満たす θ の値をそれぞれ求めなさい．

$$(1)\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)\ \cos\theta = 0 \quad (3)\ \tan\theta = -\sqrt{3}$$

＜解答＞

(1) 図 1・1 より，$\sin\theta = \sqrt{3}/2$ となるのは，単位円上において，$60°, 120°$ であるため，弧度法により表せば，$\theta = \pi/3, 2\pi/3$ となります．

(2) 余弦の値は単位円上において，x 座標の値と対応しているため，$\cos\theta = 0$ を満たす点は，y 軸上にあります．すなわち，$\theta = \pi/2, 3\pi/2$ となります．

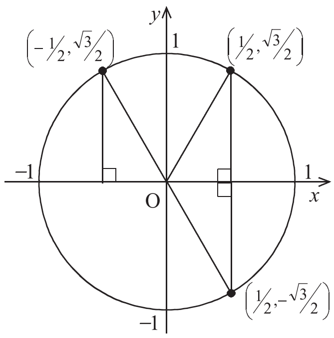


図1・1 問題 1-2

(3) (1) と同様に図 1・1 より，$\tan\theta = -\sqrt{3}$ となるのは，単位円上において，$120°, 300°$ であるため，弧度法により，$\theta = 2\pi/3, 5\pi/3$ と表されます．

＜問題 1-3 ＞ 次の方程式を解きなさい．ただし，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．

$$(1)\cos 2\theta + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2)\ \frac{2\sin 2\theta + 2}{\cos 2\theta + 1} = 0$$

＜解答＞

(1) 2 倍角の公式および $\pi/2$ の変化に関する公式より，与式を以下のように変形します．

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

上式より, $\cos\theta = -1/2, 1$ と求められます．$\cos\theta = -1/2$ のとき, $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ となり，$\cos\theta = 1$ のとき，$\theta = 0$ となります．

(2) 2 倍角の公式より，与式を以下のように変形します．

$$\begin{aligned}
\frac{4\cos\theta\sin\theta+2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta+1}&=0\\
\frac{4\cos\theta\sin\theta+2}{2\cos^2\theta}&=0\\
2\tan\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}&=0\\
\tan^2\theta+2\tan\theta+1&=0\\
(\tan\theta+1)^2&=0
\end{aligned}$$

上式より，$\tan\theta=-1$ と求められます．したがって，$\theta=3\pi/4,7\pi/4$ となります．

＜問題 1-4 ＞　次の計算をしなさい．

(1) $\dfrac{9^{-2}\cdot 2^5}{\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^{-6}}$　(2) $\sqrt[10]{(12^2+5^2)^{5/2}}$　(3) $1296^{0.125}$

＜解答＞

$$\begin{aligned}
(1)3^{-4}\cdot 2^5\cdot\left(3\sqrt{3}\right)^3&=3^{-4}\cdot 2^5\cdot 3^3\cdot 3\sqrt{3}\\
&=32\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ \sqrt[10]{(13^2)^{5/2}}&=13^{2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}}\\
&=\sqrt{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3)(2^4\cdot 3^4)^{1/8}&=(2\cdot 3)^{1/2}\\
&=\sqrt{6}
\end{aligned}$$

＜問題 1-5 ＞　次の方程式を解きなさい．

(1) $3^{\frac{x}{2}}-\left(\sqrt{27}\right)^x=0$　(2) $\log_2(x-3)-\log_4(2x-6)=1$　(3) $3^x=2^{x+2}$

＜解答＞

(1) 与式を次のように変形します．

$$3^{x/2} - \left(\sqrt{3^3}\right)^x = 0$$
$$3^{x/2} - \left(3^{x/2}\right)^3 = 0$$

ここで，$3^{x/2} = X$ とおけば，上式は，

$$X - X^3 = 0$$
$$X(1-X)(1+X) = 0$$

となることから，$X = 0, \pm 1$ と求められます．$X(= 3^{x/2}) > 0$ であることから，$X = 0, -1$ は解の条件を満たさないため，$3^{x/2} = 1$ となります．すなわち，$x = 0$ と求められます．

(2) 与式を次のように変形します．

$$\log_2(x-3) - \frac{\log_2(2x-6)}{\log_2 4} = \log_2 2$$
$$\log_2(x-3) - \log_2(2x-6)^{1/2} = \log_2 2$$
$$\log_2 \frac{x-3}{(2x-6)^{1/2}} = \log_2 2$$
$$\frac{x-3}{(2x-6)^{1/2}} = 2$$
$$x - 3 = 2(2x-6)^{1/2}$$

さらに，上式の両辺を 2 乗すると，

$$x^2 - 6x + 9 = 4(2x-6)$$
$$(x-11)(x-3) = 0$$

となり，$x = 3, 11$ と求められます．ここで，真数は正であることから，$x > 3$ となるため，$x = 11$ が解となります．

(3) 両辺の対数をとることにより，

$$
\begin{aligned}
\log_e 3^x &= \log_e 2^{x+2} \\
x \log_e 3 &= (x+2) \log_e 2 \\
x (\log_e 3 - \log_e 2) &= 2 \log_e 2 \\
x &= \frac{2 \log_e 2}{\log_e 3 - \log_e 2}
\end{aligned}
$$

と求められます.

＜問題 1-6 ＞　次の関係式が成り立つことをそれぞれ確かめなさい.

$$(1)\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

$$(2)\ \sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

＜解答＞

(1) $\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \alpha, \frac{\theta_1-\theta_2}{2} = \beta$ とすれば,

$$\text{右辺} = 2\sin\alpha\cos\beta$$

となります．加法定理により，上式は,

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
&= \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \text{左辺}
\end{aligned}
$$

となり，与式は成り立ちます.

(2) (1) と同様に $\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \alpha, \frac{\theta_1-\theta_2}{2} = \beta$ とすれば,

$$\text{右辺} = 2\cos\alpha\sin\beta$$

となります．加法定理により，上式は,

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\
&= \sin\theta_1 - \sin\theta_2 = \text{左辺}
\end{aligned}
$$

となり，与式は成り立ちます.

＜問題 1-7 ＞　$(0.7)^{100}$ を計算した結果には，小数第何位に 0 でない数が初めて現れるか求めなさい．ただし，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする.

＜解答＞

$(0.7)^{100}$ の常用対数をとれば，

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{100} &= 100\log_{10}\left(\frac{7}{10}\right)\\ &= 100\left(\log_{10}7-1\right)\\ &= 100\,(0.8451-1)\\ &= -15.49\end{aligned}$$

となります．したがって，

$$10^{-16} < (0.7)^{100} < 10^{-15}$$

となるため，小数第 16 位に 0 以外の数が初めて現れます．

第 2 章　章末問題解答

＜問題 2-1＞　以下の関数の導関数を求めなさい.

(1) $f(x) = -x^3 - 5x + \dfrac{2}{x^2}$　(2) $f(x) = 2xe^{-2x}$　(3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

(4) $f(x) = \log_e \dfrac{1}{x} \cdot \log_e x^2$　(5) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x}$　(6) $f(x) = \tan ax$

＜解答＞

$$
\begin{aligned}
&(1)\ f'(x) = -3x^2 - 5 - 4x^{-3} \\
&(2)\ f'(x) = 2e^{-2x} + 2x(e^{-2x})' \\
& = 2e^{-2x}\,(1 - 2x) \\
&(3)\ f'(x) = \frac{(\cos x)'x - \cos x(x)'}{x^2} \\
& = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \\
&(4)\ f'(x) = \frac{1}{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \log_e x^2 + \log_e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \\
& = x \cdot \frac{-1}{x^2} \log_e x^2 + \frac{2}{x} \log_e \frac{1}{x} \\
& = -\frac{2}{x} \log_e x + \frac{2}{x} \log_e \frac{1}{x} \\
& = -\frac{4\log_e x}{x} \\
&(5)\ f'(x) = \left\{\left(2x^2 - 3x\right)^{1/3}\right\}' \\
& = \frac{1}{3}(4x - 3)\left(2x^2 - 3x\right)^{-2/3} \\
&(6)\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2 ax} \cdot (ax)' = \frac{a}{\cos^2 ax}
\end{aligned}
$$

＜問題 2-2 ＞ 以下の関数について，(1)(2) は 2 階微分を求め，(3) は x に関する偏微分，(4) は y に関する偏微分をそれぞれ求めなさい.

(1) $f(x) = \cos^2 x$ (2) $f(x) = (\log_e x)^2$

(3) $f(x, y) = \tan \dfrac{y}{x}$ (4) $f(x, y) = \left(xy^2 + x^2 y\right)^{2x}$

＜解答＞

$$
\begin{aligned}
(1)\ f'(x) &= 2\cos x(-\sin x) \\
&= -\sin 2x \\
f''(x) &= -\cos 2x \cdot (2x)' \\
&= -2\cos 2x \\
(2)\ f'(x) &= 2\log_e x \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{x}\log_e x \\
f''(x) &= -2x^{-2}\log_e x + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x} \\
&= -2x^{-2}\left(\log_e x - 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) f_x &= \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}}\left(\frac{y}{x}\right)' \\
&= \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= -\frac{y}{x^2\cos^2 \frac{y}{x}} \\
(4) f_y &= 2x\left(xy^2 + x^2 y\right)^{2x-1}\left(xy^2 + x^2 y\right)' \\
&= 2x\left(2xy + x^2\right)\left(xy^2 + x^2 y\right)^{2x-1} \\
&= 2x^2\left(2y + x\right)\left(xy^2 + x^2 y\right)^{2x-1}
\end{aligned}
$$

＜問題 2-3 ＞ 次の関数の不定積分をそれぞれ求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x+2)(x-1)dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x + 2}{x+1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^5}dx$

(4) $\displaystyle\int \log_e 3x\ dx$ (5) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}dx$

<解答>

(1) 被積分関数を展開することにより,

$$\int (x^2+x-2)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

と得られます.

(2) 被積分関数の分子を分母で割ると，商は $x^2 - x + 6$，余りは -4 となるので,
与式は,

$$\int \frac{x^3+5x+2}{x+1}dx = \int \left(x^2 - x + 6 - \frac{4}{x+1} \right) dx$$

と表されるため,

$$\int \left(x^2 - x + 6 - \frac{4}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x - 4\log_e |x+1| + C$$

と与えられます.

(3) $x+1=t$ とおけば,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^5}dx &= \int t^{-5}dt \\ &= -\frac{1}{4}t^{-4} + C \\ &= -\frac{1}{4(x+1)^4} + C \end{aligned}$$

と求められます.

(4) $3x = t$ とおけば，$dx = \frac{1}{3}dt$ となり，これを用いれば，与式は,

$$\int \log_e 3x \ dx = \frac{1}{3}\int \log_e t dt$$

と表されます．さらに，$f'(t) = 1$, $g(t) = \log_e t$ として，部分積分法を用いれば,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int t'\cdot\log_e t dt &= \frac{1}{3}\left\{t\log_e t - \int t(\log_e t)' dt\right\} + C \\
&= \frac{1}{3}\left(t\log_e t - t\right) + C \\
&= x\log_e 3x - x + C
\end{aligned}$$

と求められます.

(5) 3 倍角の公式 (例題 1-7) より,

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

となることを用いれば,

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x dx &= \int\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)dx \\
&= -\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\int \sin 3x dx + C \\
&= -\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\int \sin t\left(\frac{1}{3}dt\right) + C \qquad (t = 3x \text{ とする}) \\
&= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C
\end{aligned}$$

と求められます.

(6) $a^2 + x^2 = t$ とおけば, $xdx = dt/2$ となります. この t を用いれば,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx &= \int t^{-3/2}\frac{dt}{2} \\
&= -2t^{-1/2}\cdot\frac{1}{2} + C \\
&= -t^{-1/2} + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C
\end{aligned}$$

と得られます.

＜問題 2-4 ＞ 次の関数の定積分をそれぞれ求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_4^0 \frac{3e^x(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx - \int_0^4 \frac{e^{2x}(x^2-x)}{e^x(e^x+3)}\ dx$ (2) $\displaystyle\int_3^3 \frac{(x-3)^3}{x-2}\ dx$

(3) $\displaystyle\int_{\pi/3}^0 \cos^2 x \tan x\ dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} |\sin\theta|\ d\theta$

＜解答＞

(1)
$$\begin{aligned}
&\int_4^0 \frac{3e^x(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx - \int_0^4 \frac{e^{2x}(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx\\
&= -\int_0^4 \frac{3e^x(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx - \int_0^4 \frac{e^{2x}(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx\\
&= -\int_0^4 \frac{(e^{2x}+3e^x)(x^2-x)}{e^{2x}+3e^x}\ dx\\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4\\
&= -\frac{40}{3}
\end{aligned}$$

(2) 積分区間の上端と下端が等しいため，0 となります．

(3)
$$\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^0 \cos^2 x \tan x\ dx &= \int_{\pi/3}^0 \cos x \sin x\ dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^0 \sin 2x\ dx
\end{aligned}$$

ここで，$2x = t$ とおけば，$dx = \frac{1}{2}dt$ となります．また，t の積分区間は，$\frac{2}{3}\pi \to 0$ となります．このことから，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^0 \sin t\ \frac{dt}{2} &= \frac{1}{4}\left[-\cos t\right]_{2\pi/3}^0\\
&= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{2}\right)\\
&= -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

と求められます．

$$(4)\quad \int_{-\pi/4}^{\pi/2} |\sin\theta|\ d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\ d\theta + \int_{-\pi/4}^{0} (-\sin\theta)\ d\theta$$
$$= [-\cos\theta]_0^{\pi/2} + [\cos\theta]_{-\pi/4}^{0}$$
$$= \{0-(-1)\} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

＜問題 2-5＞ 次の重積分をそれぞれ求めなさい.

$$(1)\quad \int\int_D (x+y)^2 dxdy \quad D = \{(x,y)| -1 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$$

$$(2)\quad \int\int_D 1dxdy \quad D = \left\{(x,y)|0 \le x \le y,\ y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$$

＜解答＞

(1) 被積分関数を展開し，x, y に関して積分すれば,

$$\int_2^3\int_{-1}^1 (x+y)^2 dxdy = \int_2^3\int_{-1}^1 \left(x^2+2xy+y^2\right) dxdy$$
$$= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2\right]_{-1}^1 dy$$
$$= \int_2^3 \left\{\left(\frac{1}{3}+y+y^2\right) - \left(-\frac{1}{3}+y-y^2\right)\right\} dy$$
$$= \int_2^3 \left(2y^2 + \frac{2}{3}\right) dy$$
$$= \left[\frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}y\right]_2^3$$
$$= \frac{40}{3}$$

と求められます.

(2) 領域 D は,

$$y \le \sqrt{2-x^2}$$
$$x^2 + y^2 \le 2$$

となることにより，半径 $\sqrt{2}$ の円の内部であり，かつ $0 \leq x \leq y$ であることから，図 2・1 の斜線部のような領域となります．ここで，円周と $y = x$ の交点 P は，

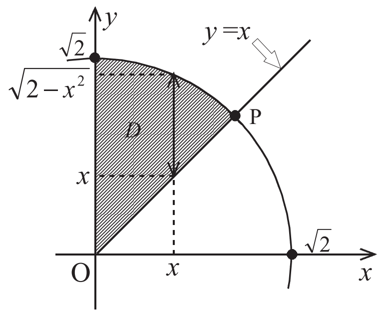


図 2・1　**問題** 2-5

$x^2 + y^2 = 2, y = x$ を解くことにより，$\mathrm{P}(1,1)$ となります．したがって，領域 D は，$D = \left\{(x,y)|0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\right\}$ と表すことができます．新たに書き直された領域 D を用いれば，

$$\begin{aligned}\int\int_D 1\ dxdy &= \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} 1\ dydx \\ &= \int_0^1 [y]_x^{\sqrt{2-x^2}}\ dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx - \int_0^1 xdx\end{aligned}$$

となります．右辺第 1 項の積分は，$x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおけば，$dx = \sqrt{2}\cos\theta$ となり，また，x が $0 \to 1$ のとき，θ は，$0 \to \pi/4$ となることから，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\cos\theta(\sqrt{2}\cos\theta d\theta)\\ &= \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta d\theta\\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta + 1)\, d\theta\\ &= \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_0^{\pi/4} d\theta\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

と求められます．また，右辺第 2 項は,

$$\int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

と求められます．以上により,

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx - \int_0^1 xdx = \frac{\pi}{4}$$

と求められます.

＜問題 2-6 ＞　次の式で表される曲線の長さをそれぞれ求めなさい.

(1) $(\cos t, \sin t + t)$; $0 \le t \le \pi$　　(2) $\left(-t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{t^3}{3}\right)$; $0 \le t \le 1$

＜解答＞

(1) $x(t), y(t)$ をそれぞれ微分すると

$$x'(t) = -\sin t, \quad y'(t) = \cos t + 1$$

となります．式 (2・105) を用いれば，曲線の長さ L は,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t + 1)^2}dt\\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2(\cos t + 1)}dt\end{aligned}$$

と表されます．ここで，半角の公式より，$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$ を用いれば,

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{t}{2}} dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\
&= 2\left[2\sin \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

と求められます.

(2) (1) と同様に $x(t), y(t), z(t)$ をそれぞれ微分すると

$$
x'(t) = -1, \quad y'(t) = \sqrt{2}t, \quad z'(t) = t^2
$$

となります．式 (2・106) を用いれば，曲線の長さ L は,

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{1} \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{2}t\right)^2 + \left(t^2\right)^2} dt \\
&= \int_0^{1} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt \\
&= \int_0^{1} \sqrt{\left(t^2 + 1\right)^2} dt \\
&= \int_0^{1} \left(t^2 + 1\right) dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^{1} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

と求められます.

＜問題 2-7 ＞　電界 $\boldsymbol{E}$ の中で電荷 Q が受ける力 $\boldsymbol{F}$ は，$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$ と与えられる．いま，電界を表すベクトル関数が，$(x, y/2 + 2x, 0)$ と与えられたとき，点電荷 $Q = 1$ を原点から点 (2,4,0) へ移動させるとするときの電界による仕事量 W をベクトル関数の線積分の式 $(2 \cdot 118)$ を用いて求めなさい.

＜解答＞

原点と点 (2,4,0) を結ぶ線分上における任意の点は，$\boldsymbol{l(t)} = (t, 2t, 0)$ と表されるため，$\boldsymbol{l'(t)} = (1, 2, 0)$ と与えられます．また，電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ は，原点と (2,4,0)

を結ぶ線上は，$y=2x$ の関係にあるため，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \left(x, \frac{2x}{2}+2x, 0\right)\\ &= (x, 3x, 0)\\ &= (t, 3t, 0)\end{aligned}$$

と表されます．したがって，仕事量 W は，

$$\begin{aligned}W &= \int_0^2 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{l'(t)}dt\\ &= \int_0^2 (1\cdot t + 2\cdot 3t + 0\cdot 0)\,dt\\ &= \int_0^2 7t\ dt\\ &= \left[\frac{7}{2}t^2\right]_0^2 = 14\end{aligned}$$

と与えられます．

第 3 章　章末問題解答

＜問題 3-1 ＞　2 次正方行列,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の行列の計算をしなさい.

(1) $A - B$　(2) $(A+B)^2$　(3) $A^2 + 2AB + B^2$

(4) C^5　(5) $C(A-2B)$　(6) $(A-2B)C$

＜解答＞

$$\begin{aligned}
(1)\ A - B &= \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 \\ 3-0 & -1-(-2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ (A+B)^2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 + (-3) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) $A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^2$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}$$

(4) $C^5 = \begin{pmatrix} (-2)^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $C(A-2B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(6) $(A-2B)C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

<問題 3-2 > 次の行列の計算をしなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -5 \\ 9 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}^7$

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 \\ -3 & 3 & -21 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}^T \right\} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -14 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

＜解答＞

(1)
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) & 7 \cdot 9 + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-5) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12 & 64 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 15 & 3 & 12 \\ 6 & -21 & 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -14 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -14 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -14 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

＜問題 3-3＞ 次の行列の行列式を求めなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & z \\ z & 0 & y \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} b & a+b & a \\ c & b+c & b \\ c & c & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 0 \\ -9 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

＜解答＞

(1) $5 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - \{3 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot (-2)\}$

$= 20 + 36 - (-6 - 12) = 74$

(2) $xy^2 - xyz$

(3) $(a+b)bc + ac^2 - \left\{ac(b+c) + b^2c\right\}$

$= c\left\{(a+b)b + ac - a(b+c) - b^2\right\}$

$= 0$

(4) $yz^2 + x^2z + xy^2 - \left(x^2y + y^2z + xz^2\right)$

$= -yz(y-z) + xz(x-z) - xy(x-y)$

$= -yz(y-z) + x\left\{-x(y-z) + (y+z)(y-z)\right\}$

$= -yz(y-z) + x(y-z)\left(-x+y+z\right)$

$= -(y-z)\left\{yz - x(y+z) + x^2\right\}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$

(5) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-35+12)(-12+2)$

$= -23 \cdot (-10) = 230$

＜問題 3-4 ＞ 次の行列に対して，逆行列が存在するかどうかを調べ，存在する場合には逆行列を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1-\sin^2\theta & \cos 2\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 0 & \tan\theta \\ \sin 2\theta & \tan\theta & 2\sin\theta \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

＜解答＞

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ $\quad\therefore$ 逆行列は存在する.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \cos 2\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 0 & \tan\theta \\ \sin 2\theta & \tan\theta & 2\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos 2\theta \sin 2\theta \tan\theta + \cos\theta \sin\theta \tan\theta - \left(\tan^2\theta \cos^2\theta + 2\sin^2\theta \cos 2\theta\right)$$

$$= \cos 2\theta (2\sin\theta\cos\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\sin\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\cos 2\theta\right)$$

$$= 2\sin^2\theta\cos 2\theta + \sin^2\theta - \left(\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\cos 2\theta\right)$$

$= 0$ $\quad\therefore$ 逆行列は存在しない.

$$(3)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-2) - \{1\cdot(-1)\cdot 1\}$$

$$= -1 \neq 0 \quad \therefore \text{逆行列は存在する.}$$

ここで，与えられた行列を A とするとき，その余因子行列 $\tilde{A}$ は,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります．また，余因子行列と逆行列との関係から $A^{-1} = \tilde{A}^T / \det A$ (式 3・71) を用いれば,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

と求められます.

$$(4)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

$\therefore a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ かつ $d \neq 0$ ならば逆行列は存在する.

(3) と同様に与えられた行列の余因子行列 $\tilde{A}$ は,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} bcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & acd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$$

となるため,

$$A^{-1} = \frac{1}{abcd}\begin{pmatrix} bcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & acd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \end{pmatrix}$$

と求められます.

＜問題 3-5 ＞ 次の連立方程式の解をクラメールの公式および消去法により，それぞれ求めなさい.

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} -2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 = 1 \\ -12x_2 + 16x_3 - 18x_4 = -3 \\ 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

＜解答＞

(1) 与えられた連立方程式を行列形式で表せば,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となります．上式の係数行列を A と表すことにします.

<u>クラメールの公式</u>

$$\det A = 2^3 + 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 4$$

クラメールの公式より,

$$x_1 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\ , \quad x_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

と求められます.

消去法

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{3}$$

$$\xrightarrow{3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{6}$$

$$\xrightarrow{6} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{8} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

1. 1 行目を 1/2 倍した後，2 行目から引く
2. 3 行目から 1 行目を引く
3. 2 行目を 2/3 倍する
4. 2 行目を 1/2 倍し，1 行目から引く
5. 2 行目を 1/2 倍し，3 行目から引く
6. 3 行目を 3/4 倍する
7. 3 行目を 1/3 倍し，1 行目から引く
8. 3 行目を 1/3 倍し，2 行目から引く

得られた結果より，$(x_1\ x_2\ x_3)^T = (4\ \ -2\ \ -2)^T$ であることがわかります.

(2)

クラメールの公式

余因子展開により，

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & -18 \\ 10 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & 16 \\ 10 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(180 - 100) = -160$$

クラメールの公式より，

$$x_1 = -\frac{1}{160}\begin{vmatrix} -3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -12 & 16 & -18 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式の性質より，1 列目を 2 倍し，2 列目に加え，さらに 1 行目と 2 行目を入れ替えれば,

$$x_1 = -\frac{1}{160}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -2 & 2 \\ -3 & -18 & 16 & -18 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{160}\begin{vmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -18 & 16 & -18 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

となります．上式を第 3 列目で余因子展開すれば,

$$x_1 = \frac{1}{160}\left\{2\begin{vmatrix} -18 & 16 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 18\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right\} = 1$$

と求められます．x_2, x_3, x_4 に関しても同様に，クラメールの公式および行列式の性質を用いれば,

$$x_2 = -\frac{1}{160}\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 16 & -18 \\ 10 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$x_3 = -\frac{1}{160}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -3 & -18 \\ 10 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_4 = -\frac{1}{160}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 16 & -3 \\ 10 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3/2$$

と求めることができます.

消去法

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 16 & -18 & -3 \\ 10 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{1} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 16 & -18 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{2}$$

$$\xrightarrow{2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 16 & -18 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 16 & -18 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{4}$$

$$\xrightarrow{4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & -18 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{5} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 10 & -18 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{6}$$

$$\xrightarrow{6} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{7} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{8}$$

$$\xrightarrow{8} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

1. 2 行目を 1 行目に，4 行目を 2 行目に移動する
2. 1 行目を 1/5 倍した後，1 行目を 10 倍して 2 行目から引く
3. 2 行目を 1/2 倍する
4. 2 行目を 2/5 倍，12 倍してそれぞれ 1 行目，4 行目に加える
5. 3 行目を $(-1/2)$ 倍する
6. 3 行目を 1/5 倍，1/2 倍してそれぞれ 1 行目，2 行目に加え，3 行目を 10 倍して 4 行目から引く
7. 4 行目を $(-1/8)$ 倍する
8. 4 行目を 1/5 倍，1/2 倍，等倍してそれぞれ 1 行目，2 行目，3 行目に加える

得られた結果より，$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T = (1\ 2\ 3\ \frac{3}{2})^T$ であることがわかります.

＜問題 3-6 ＞ 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

＜解答＞

(1) 固有方程式より，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 17-\lambda & 16 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (17-\lambda)(9-\lambda) - 8 \cdot 16 &= 0 \\ \lambda^2 - 26\lambda + 25 &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda-25) &= 0 \end{aligned}$$

となるため，固有値は $\lambda = 1, 25$ と求められます.

固有ベクトルを $(s_1\ s_2)^T$ と表せば，$\lambda = 1, 25$ に対する固有ベクトルは，

i. $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 16s_1 + 16s_2 &= 0 \\ (s_1\ s_2)^T &= c(1\ \ -1)^T \end{aligned}$$

ii. $\lambda = 25$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -8s_1 + 16s_2 &= 0 \\ (s_1\ s_2)^T &= c(2\ 1)^T \end{aligned}$$

と求められます.

(2) (1) と同様に固有方程式より，

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 4-\lambda & 3 \\ 3 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

となり，上式を解くことにより，固有値は $\lambda = 4, 1$(重解) と求められます．

固有ベクトルを $(s_1\ s_2\ s_3)^T$ と表せば，$\lambda = 4, 1$ に対する固有ベクトルは，それぞれ以下のように求められます．

i. $\lambda = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式より，

$$\begin{aligned} -s_2 - s_3 &= 0 \\ -s_1 + s_3 &= 0 \\ s_1 - s_2 - 2s_3 &= 0 \end{aligned}$$

が得られます．第1式より，$s_2 = -s_3$，また第2式より，$s_1 = s_3$ となることから，$s_3 = 1$ とすれば，$s_1 = 1, s_2 = -1$ となるため，$(s_1\ s_2\ s_3)^T = c(1\ -1\ 1)^T$ と求められます．

ii. $\lambda = 1$(重解) のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式より，

$$s_1 - s_2 - s_3 = 0$$

が得られます．上式を満たし，かつ変換行列 S の逆行列が存在するように残る2つの固有ベクトルを決めれば，$(s_1\ s_2\ s_3)^T = c(1\ 1\ 0)^T, c(1\ 0\ 1)^T$ となります．

＜問題 3-7 ＞ 3 次正方行列,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

について,

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(2) (1) の結果を利用し，A^n を求めなさい.

＜解答＞

(1) 問題 3-6 と同様に固有方程式より,

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -4 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

となり，上式を解くことにより，固有値は $\lambda = -3, \pm 2$ と求められます.

固有ベクトルを $(s_1\ s_2\ s_3)^T$ と表せば，$\lambda = -3, \pm 2$ に対する固有ベクトルは，それぞれ以下のように求められます.

i. $\lambda = -3$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式より,

$$\begin{aligned} s_1 + 2s_2 + s_3 &= 0 \\ -s_1 + 5s_2 + s_3 &= 0 \\ -4s_1 + 6s_2 &= 0 \end{aligned}$$

が得られます．第 3 式より, $2s_1 = 3s_3$ となることから, $s_1 = 3, s_2 = 2$ となります．また，この結果を第 2 式に用いれば，$s_3 = -7$ となり $(s_1\ s_2\ s_3)^T = c(3\ 2\ -7)^T$ と求められます.

ii. $\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式より,

$$\begin{aligned} -4s_1 + 2s_2 + s_3 &= 0 \\ -s_1 + s_3 &= 0 \\ -4s_1 + 6s_2 - 5s_3 &= 0 \end{aligned}$$

が得られます．第2式より，$s_1 = s_3$ となることから，$s_1 = 1, s_2 = 1$ となります．また，この結果を第1式に用いれば，$s_2 = 3/2$ となり $(s_1\ s_2\ s_3)^T = c(2\ 3\ 2)^T$ と求められます．

iii. $\lambda = -2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式より,

$$\begin{aligned} 2s_2 + s_3 &= 0 \\ -s_1 + 4s_2 + s_3 &= 0 \\ -4s_1 + 6s_2 - s_3 &= 0 \end{aligned}$$

が得られます．第1式より, $s_3 = -2s_2$ となることから, $s_2 = 1, s_3 = -2$ となります．また, この結果を第2式に用いれば, $s_1 = 2$ となり $(s_1\ s_2\ s_3)^T = c(2\ 1\ -2)^T$ と求められます．

(2) (1) より変換行列 S は,

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

となり，その逆行列 S^{-1} は，

$$S^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ -3 & 8 & 1 \\ 25 & -20 & 5 \end{pmatrix}$$

と求められます．また，求められた固有値より，

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(S^{-1}AS\right)^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}A\cancel{SS^{-1}}A\cancel{SS^{-1}}\cdots\cancel{SS^{-1}}AS = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}A^nS = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

となることから，上式の両辺の左から S，右から S^{-1} を掛ければ，

$$\begin{aligned} A^n &= S\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}S^{-1} \\ &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ -3 & 8 & 1 \\ 25 & -20 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められます．

第4章　演習問題解答

<問題 4-1>　$\boldsymbol{A} = 3\,\boldsymbol{a}_x - 2\,\boldsymbol{a}_y + 3\,\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B} = -3\,\boldsymbol{a}_x + 2\,\boldsymbol{a}_y - 4\,\boldsymbol{a}_z$ および $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_z$ のとき，以下の (1) から (5) を求めなさい。

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$

(2) $3\,\boldsymbol{A} + 2\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$

(3) $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|$

(4) $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$ のスカラ積

(5) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ に平行な単位ベクトル

<解答>

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = (3-3+1)\boldsymbol{a}_x + (-2+2+1)\boldsymbol{a}_y + (3-4-1)\boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\,\boldsymbol{a}_z$

(2) $3\,\boldsymbol{A} + 2\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$

$3\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = (9-6+1)\boldsymbol{a}_x + (-6+4+1)\boldsymbol{a}_y + (9-8-1)\boldsymbol{a}_z = 4\,\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y$

(3) $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}|$

$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}| = |(3+3+1)\boldsymbol{a}_x + (-2-2+1)\boldsymbol{a}_y + (3+4-1)\boldsymbol{a}_z| = |7\,\boldsymbol{a}_x - 3\,\boldsymbol{a}_y + 6\,\boldsymbol{a}_z| = \sqrt{7^2+3^2+6^2} = \sqrt{94}$

(4) $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$ のスカラ積

スカラ積なので，各 x, y, z 成分ごとの積を求めればよいので，

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -9 - 4 - 12 = -25$　となります。

(5) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ に平行な単位ベクトル

まず，$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ を求めるが，(1) の結果より

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\,\boldsymbol{a}_z$ であり，その絶対値は

$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$　となります。

したがって，単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ は,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\,\boldsymbol{a}_z)$$

となります。

＜問題 4-2＞ $\boldsymbol{A} = 3\,\boldsymbol{a}_x + 3\,\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{B} = 2\,\boldsymbol{a}_x + 2\,\boldsymbol{a}_y + 2\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_z$ のとき，以下の (1) から (7) を求めなさい。

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$
(2) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角
(3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$
(4) $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$
(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$
(6) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$
(7) $(3\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-3\,\boldsymbol{B})$

＜解答＞

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (3\cdot 2) + (3\cdot 2) + (0\cdot 2\sqrt{2}) = 6 + 6 + 0 = 12$

(2) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角

まず，$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$，$B = |\boldsymbol{B}| = \sqrt{4+4+8} = 4$ となります。

そして，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{12}{3\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4},\ \text{または } 45^\circ$$

(3) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = (6\sqrt{2}-0)\boldsymbol{a}_x + (0-6\sqrt{2})\boldsymbol{a}_y + (6-6)\boldsymbol{a}_z$$

$$= 6\sqrt{2}\boldsymbol{a}_x - 6\sqrt{2}\boldsymbol{a}_y$$

(4) $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$

　$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |6\sqrt{2}\boldsymbol{a}_x - 6\sqrt{2}\boldsymbol{a}_y| = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{144} = 12$

(5) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$

　まず，$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_x + 5\boldsymbol{a}_y + 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$ となります。したがって，

　$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = (5\boldsymbol{a}_x + 5\boldsymbol{a}_y + 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z) \cdot (\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z) = (5 \times 1) + (5 \times 1) + (2\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2})) = 5 + 5 - 8 = 2$

と求まります。

(6) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$

　(5) と同様に，$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{a}_x + 5\boldsymbol{a}_y + 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y - 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$ である。

　したがって，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 5 & 5 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= (-10\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\boldsymbol{a}_x + (2\sqrt{2} + 10\sqrt{2})\boldsymbol{a}_y + (5 - 5)\boldsymbol{a}_z \\ &= -12\sqrt{2}\boldsymbol{a}_x + 12\sqrt{2}\boldsymbol{a}_y\end{aligned}$$

となります。

(7) $(3\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{B})$

　まず，$3\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 11\,\boldsymbol{a}_x + 11\,\boldsymbol{a}_y + 2\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{B} = -3\,\boldsymbol{a}_x - 3\,\boldsymbol{a}_y - 6\sqrt{2}\boldsymbol{a}_z$ である。

　したがって，

　$(3\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{B}) = (11 \cdot (-3)) + (11 \cdot (-3)) + (2\sqrt{2} \cdot (-6\sqrt{2})) = -33 - 33 - 24 = -90$

となります。

＜問題 4-3＞　ベクトル $\boldsymbol{A} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_x + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_y + 3\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_z$ とベクトル $\boldsymbol{B} = k\,\boldsymbol{a}_x + k\,\boldsymbol{a}_y$ が与えられたとき，(1) スカラ積，(2) ベクトル積，を用いて $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を求めなさい。ただし，k は任意の正の整数とする。

＜解答＞

(1) スカラ積は

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{3}{\sqrt{2}}\,k+\frac{3}{\sqrt{2}}\,k+0=3\sqrt{2}\,k$$

次に，ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の大きさは

$$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$$

$$B=|\boldsymbol{B}|=\sqrt{k^2+k^2+0}=\sqrt{2\,k^2}=\sqrt{2}\,k$$

であるから，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}\,k}{6\sqrt{2}\,k}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{3},\ \text{または}\ 60^\circ$$

(2) ベクトル積は

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 3\sqrt{3}\\ k & k & 0\end{vmatrix}=(0-k3\sqrt{3})\boldsymbol{a}_x+(k3\sqrt{3}-0)\boldsymbol{a}_y+(k\frac{3}{\sqrt{2}}-k\frac{3}{\sqrt{2}})\boldsymbol{a}_z$$

$$=-3\sqrt{3}\,k\boldsymbol{a}_x+3\sqrt{3}\,k\boldsymbol{a}_y$$

このベクトル積の大きさは,

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{(3\sqrt{3}\,k)^2+(3\sqrt{3}\,k)^2}=\sqrt{54k^2}=3\sqrt{6}\,k$$

となります。また，それぞれのベクトルの大きさは，(1) の結果より,

$$A=|\boldsymbol{A}|=6$$

$$B=|\boldsymbol{B}|=\sqrt{2}\,k$$

そして，$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin\theta$ より

$$\sin\theta=\frac{3\sqrt{6}\,k}{6\sqrt{2}\,k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{3},\ \text{または}\ 60^\circ$$

＜問題 4-4 ＞ ベクトル $\boldsymbol{A} = 6\,\boldsymbol{a}_x - 3\,\boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_z$ とベクトル $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x + 4\,\boldsymbol{a}_y - 6\,\boldsymbol{a}_z$ が直交することを示しなさい。

＜解答＞

互いに直交した二つのベクトルのスカラ積は 0 となりますから，スカラ積を計算することにより確かめられます。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (6\boldsymbol{a}_x - 3\boldsymbol{a}_y - \boldsymbol{a}_z)\cdot(\boldsymbol{a}_x + 4\boldsymbol{a}_y - 6\boldsymbol{a}_z) = 6 - 12 + 6 = 0$$

＜問題 4-5 ＞ 以下の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1) 点 $(-2,4,1)$ から点 $(3,4,3)$ に向かうベクトル $\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

(2) このベクトル $\boldsymbol{A}$ と同方向の単位ベクトル $\boldsymbol{a}_A$ を求めなさい。

＜解答＞

(1) ベクトルの終点から始点の座標を引けば,

$$\boldsymbol{A} = (3+2)\boldsymbol{a}_x + (4-4)\boldsymbol{a}_y + (3-1)\boldsymbol{a}_z = 5\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_z$$

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは,

$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$ となるので，単位ベクトル $\boldsymbol{a}_A$ は

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{5\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_x + \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{a}_z \approx 0.93\boldsymbol{a}_x + 0.37\boldsymbol{a}_z$$

と求まります。

＜問題 4-6 ＞ 以下の (1) から (5) の式が成り立つことを示しなさい。

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = -2\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0$

(4) $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$

(5) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0$

＜解答＞

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\\
&= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\text{（スカラ積は交換の法則が成り立つ）}\\
&= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\\
&= \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2
\end{aligned}$$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=-2\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}\\
&= 0-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}-0\text{（同方向のベクトル積は }0\text{, 交換すると符号が逆）}\\
&= -2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\text{（スカラ三重積での順序の入れ替え）}\\
&= \boldsymbol{B}\cdot(0)\text{（同方向のベクトル積は }0\text{）}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(4) $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2 &= \{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\}^2\\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\sin^2\theta\\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2-|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\cos^2\theta\\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})-\{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\}^2\\
&= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2
\end{aligned}$$

(5) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

それぞれのベクトル三重積は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\
\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\\
\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

と変形できます。そして，スカラ積では交換の法則が成り立つので

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=0$
となります。

＜問題 4-7 ＞ 点 $(-6,3,-7)$ から点 $(6,3,-2)$ に向かう単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ の式を求めなさい。

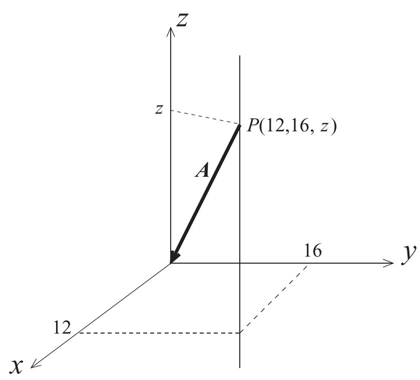
＜解答＞

ベクトルの終点から始点の座標の値を引いて，これをベクトル $\boldsymbol{A}$ とすれば,
$\boldsymbol{A}=(6+6)\boldsymbol{a}_x+(3-3)\boldsymbol{a}_y+(-2+7)\boldsymbol{a}_z=12\boldsymbol{a}_x+5\boldsymbol{a}_z$
となります。次に，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは,
$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ となり，単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ は,
$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{12\boldsymbol{a}_x+5\boldsymbol{a}_z}{13}=\frac{12}{13}\boldsymbol{a}_x+\frac{5}{13}\boldsymbol{a}_z\approx 0.92\boldsymbol{a}_x+0.38\boldsymbol{a}_z$$
と求まります。

＜問題 4-8 ＞ $x=12, y=16$ で表される直線上の任意の一点から原点に向かう単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ の式を求めなさい。

＜解答＞

下図の点 P から原点に向かうベクトル $\boldsymbol{A}$ の式は,



$\boldsymbol{A}=-12\boldsymbol{a}_x-16\boldsymbol{a}_y-z\boldsymbol{a}_z$ となり，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは,

$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{12^2+16^2+z^2}=\sqrt{400+z^2}$ となります。

したがって，単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

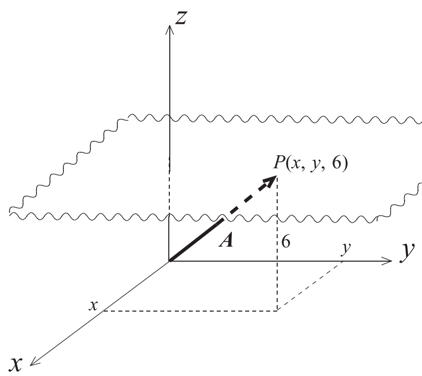
$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{-12\boldsymbol{a}_x-16\boldsymbol{a}_y-z\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{400+z^2}}$$

と求まります。

＜問題 4-9＞　原点から $z=6$ の平面上の任意の一点に向かう単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ の式を求めなさい。

＜解答＞

まず，原点から $z=6$ の平面上の任意の一点に向かうベクトル $\boldsymbol{A}$ は，下図のようになります。このベクトル $\boldsymbol{A}$ の式は,



$\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+6\boldsymbol{a}_z$ となり，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは

$A=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{x^2+y^2+36}$ となります。

したがって，単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{A}}{A}=\frac{x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+6\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+36}}$$

と求まります。

＜問題 4-10＞　以下の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1)$V(x,y,z)=x^2y^2+xyz+3xz^2$ の勾配を求めなさい。

(2) 次に，方向を示す単位ベクトルが $\boldsymbol{a}_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z)$ で与えられているとき，点 $(1,1,1)$ における grad$V$ の $\boldsymbol{a}_n$ 方向の成分を求めなさい。

＜解答＞

(1) 勾配の定義式から，

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,V &= \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{a}_x+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{a}_y+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{a}_z \\ &= (2xy^2+yz+3z^2)\boldsymbol{a}_x+(2x^2y+xz)\boldsymbol{a}_y+(xy+6xz)\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

となります。

(2) そして，(1) の結果に $x=1,\ y=1,\ z=1$ を代入して，

$$\mathrm{grad}\,V|_{(1,1,1)}=6\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y+7\boldsymbol{a}_z$$

となります。このベクトルを $\boldsymbol{A}$ とおき，単位ベクトル $\boldsymbol{a}_n$ とのスカラ積をとればベクトル $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{a}_n$ 方向の成分が求まりますから，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_n &= (6\boldsymbol{a}_x+3\boldsymbol{a}_y+7\boldsymbol{a}_z)\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_x+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_y+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}_z) \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{16}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となります。

＜問題 4-11＞　$\boldsymbol{A}=e^{-y}(\cos x\boldsymbol{a}_x-\cos x\boldsymbol{a}_y+\cos x\boldsymbol{a}_z)$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散を求めなさい。

＜解答＞

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を各成分ごとに分けて書き表せば，

$\boldsymbol{A}=e^{-y}\cos x\boldsymbol{a}_x-e^{-y}\cos x\boldsymbol{a}_y+e^{-y}\cos x\boldsymbol{a}_z$ となり，発散は各成分をその成分で偏微分すればよいので，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{-y}\cos x)+\frac{\partial}{\partial y}(-e^{-y}\cos x)+\frac{\partial}{\partial z}(e^{-y}\cos x) \\ &= -e^{-y}\sin x+e^{-y}\cos x+0=e^{-y}(\cos x-\sin x)\end{aligned}$$

となります。

＜問題 4-12＞　$\boldsymbol{A} = (1/\sqrt{x^2+y^2})\boldsymbol{a}_x$ のとき，点 $(1,1,0)$ における $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

＜解答＞

ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，x 成分のみですから発散は,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

となります。ここで，合成関数の微分

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

を利用して,

$y = u^{-\frac{1}{2}}$，$u = x^2+y^2$　とおけば，$(y)' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$，$(u)' = 2x$　となります。

したがって,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) = \frac{-x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

よって，$x=1$，$y=1$，$z=0$ を上式に代入すれば,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}|_{(1,1,0)} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

と求まります。

＜問題 4-13＞　$\boldsymbol{A} = x\sin y\boldsymbol{a}_x + 2x\cos y\boldsymbol{a}_y + 2z^2\boldsymbol{a}_z$ のとき，点 $(0,0,1)$ における $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

＜解答＞

まず,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z^2)\\ &= \sin y - 2x\sin y + 4z = (1-2x)\sin y + 4z\end{aligned}$$

よって,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}|_{(0,0,1)} = (1-2\cdot 0)\sin 0 + 4\cdot 1 = 4$$

と求まります。

＜問題 4-14＞ $\boldsymbol{A} = (\cos x)(\sin y)\boldsymbol{a}_x + (\sin x)(\cos y)\boldsymbol{a}_y + (\cos x)(\sin y)\boldsymbol{a}_z$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の回転を求めなさい。

＜解答＞

まず，回転の一般式は,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z$$

ですから,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= (\cos x\cos y - 0)\boldsymbol{a}_x + (0-(-\sin x)\sin y)\boldsymbol{a}_y + (\cos x\cos y - \cos x\cos y)\boldsymbol{a}_z \\ &= \cos x\cos y\boldsymbol{a}_x + \sin x\sin y\boldsymbol{a}_y\end{aligned}$$

と求まります。

＜問題 4-15＞ 前問の答えに対する発散を求めなさい。

＜解答＞

前問の結果から,

$$\mathrm{div}\{(\cos x\cos y\boldsymbol{a}_x + \sin x\sin y\boldsymbol{a}_y)\} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x\cos y) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin x\sin y)$$
$$= -\sin x\cos y + \sin x\cos y = 0$$

と求まります。

＜問題 4-16＞ $\boldsymbol{A} = x\sin y\boldsymbol{a}_x + 2x\cos y\boldsymbol{a}_y + 2z^2\boldsymbol{a}_z$ のとき，点 $(0,0,1)$ における $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を求めなさい。

＜解答＞

回転の一般式は,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{a}_z$$

から,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= (0-0)\boldsymbol{a}_x + (0-0)\boldsymbol{a}_y + (2\cos y - x\cos y)\boldsymbol{a}_z \\ &= (2-x)\cos y\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

となりますから，点 $(0,0,1)$ における回転は,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}|_{(0,0,1)} = (2-0)\cos 0\boldsymbol{a}_z = 2\boldsymbol{a}_z$$

と求まります。

第5章　演習問題解答

＜問題 5-1 ＞　複素数 z の値が $z^2 = -j$ となる z を求めなさい。

＜解答＞

z は複素数ですから，$z = x + jy$ とすれば，

$z^2 = x^2 + j2xy + j^2y^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$ となります。

$z^2 = -j$ であることから，上式は実数部が $x^2 - y^2 = 0$，虚数部が $2xy = -1$ でなければなりません。

したがって，$x^2 = y^2$，$xy = -1/2$ を解いて

$x = -y$（$xy = -1/2$ なので $x = y$ は不適）となり，
$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，求める z は

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$$

と求まります。

＜問題 5-2 ＞　次の (1) から (4) を直交形式で表しなさい。
(1) $1/(a + jb)$　(2) $\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$　(3) j^4　(4) $1/(1 + j + j^2)$

＜解答＞

(1)

$$\frac{1}{a + jb} \times \frac{a - jb}{a - jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j\frac{b}{a^2 + b^2}$$

(2)

まず，( ) 内を指数関数形式に直して，

$$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

よって，

$$\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{-j\pi}$$

となりますから，直交形式に戻せば，

$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\sin\pi = -1 - j0 = -1$

と求まります。

(3)

$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

(4)

$$\frac{1}{1 + j + j^2} = \frac{1}{1 + j - 1} = \frac{1}{j} = -j$$

＜問題 5-3 ＞ 前問の答えを極座標表現で表しなさい。

＜解答＞

(1) 複素数の絶対値は，

$$|z| = r = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となります。そして，偏角は，

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{b}{a^2+b^2}}{\frac{a}{a^2+b^2}}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

となります。よって，極座標表現は，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\angle\tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

となります。

(2) $1\angle\pi$ (3) $1\angle 0$ (4) $1\angle -\frac{\pi}{2}$

＜問題 5-4 ＞ $\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^5$ をド・モアブルの定理を用いて求めなさい。

＜解答＞

まず，( ) 内を指数関数形式に直して，

$$\frac{1+j\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{j\frac{\pi}{3}}$$

ここで，オイラーの公式を適用して，

$$e^{j\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}$$

となります。よって，

$$\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 = \cos\frac{5\pi}{3} + j\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まります。

＜問題 5-5 ＞ 以下の (1) から (5) に示した電圧のフェーザ表示を直交形式の形で示しなさい。

(1) $e_1 = 10\sqrt{2}\sin\omega t$ (2) $e_2 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

(3) $e_3 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ (4) $e_4 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

(5) $e_5 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$

＜解答＞

(1)

$$E_1 = 10e^{j0} = 10(\cos 0 + j\sin 0) = 10$$

(2)

$$E_2 = 10e^{j\frac{\pi}{2}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = j10$$

(3)

$$E_3 = 10e^{-j\frac{\pi}{2}} = 10\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -j10$$

(4)

$$E_4 = 10e^{j\frac{\pi}{4}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2} + j5\sqrt{2}$$

(5)

$$E_5 = 10e^{-j\frac{\pi}{6}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} - j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5\sqrt{3} - j5$$

＜問題 5-6 ＞　交流の電圧 100V，周波数 50Hz の電源に負荷を接続したところ，5A の電流が流れた。このときのと電流は，電圧よりも $\pi/3$ 遅れていた。負荷のインピーダンスを求めなさい。

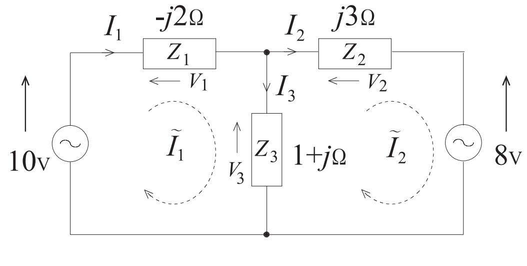
＜解答＞

問題より電圧と電流のフェーザ表示 E, I は，それぞれ，$E = 100$, $I = 5e^{-j\frac{\pi}{3}}$ となります。よって，インピーダンス Z は,

$$Z = \frac{100}{5e^{-j\frac{\pi}{3}}} = 20e^{j\frac{\pi}{3}} = 20\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 10 + j10\sqrt{3}$$

と求まります。

＜問題 5-7 ＞　下図に示す回路において各素子に流れる電流を求めなさい。ただし，Z_1, Z_2, Z_3 に流れる電流をそれぞれ I_1, I_2, I_3 とする。



＜解答＞

上図のような向きに閉路電流 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ をとり, 各インピーダンスの電圧降下 V_1, V_2, V_3 も図の向きとします。ここで，枝電流 I_1, I_2, I_3 と閉路電流 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ の関係は,

$$I_1 = \tilde{I}_1$$

$$I_2 = \tilde{I}_2$$

$$I_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$$

となります。そして，それぞれの閉路電流についての方程式は，

閉路電流１：$10 - V_1 - V_3 = 0$ から

$$\begin{aligned} 10 &= V_1 + V_3 \\ &= -j2\tilde{I}_1 + (1+j)(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \end{aligned}$$

$$\therefore 10 = (1-j)\tilde{I}_1 - (1+j)\tilde{I}_2$$

閉路電流２：$-8 - V_2 - V_3 = 0$ から

$$\begin{aligned} -8 &= V_2 + V_3 \\ &= (1+j)(\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1) + j3\tilde{I}_2 \end{aligned}$$

$$\therefore -8 = -(1+j)\tilde{I}_1 + (1+j4)\tilde{I}_2$$

クラメールの公式を用いて閉路電流 $\tilde{I}_1$ は，

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & -(1+j) \\ -8 & 1+j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-j & -(1+j) \\ -(1+j) & 1+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j32}{5+j} \\ &= \frac{2+j32}{5+j} \times \frac{5-j}{5-j} = \frac{42+j158}{26} = 1.62 + j6.08 \ \ \text{[A]} \end{aligned}$$

となります。閉路電流 $\tilde{I}_2$ も同様に，

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1-j & 10 \\ -(1+j) & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-j & -(1+j) \\ -(1+j) & 1+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j18}{5+j} \\ &= \frac{2+j18}{5+j} \times \frac{5-j}{5-j} = \frac{28+j88}{26} = 1.08 + j3.38 \ \ \text{[A]} \end{aligned}$$

となります。ここで求めた閉路電流 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ は，インピーダンス Z_1, Z_2 を流れる枝電流 I_1, I_2 と等価です。したがって，インピーダンス Z_3 を流れる枝電流 I_3 は

$$I_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = 1.62 + j6.08 - 1.08 - j3.38 = 0.54 + j2.70 \quad [\mathrm{A}]$$

と求まります。

＜問題 5-8 ＞ 電源の周波数が 50Hz の回路において抵抗 $R = 10\Omega$ とコイル $L = 20\mathrm{mH}$ が並列に接続されたときの合成インピーダンス Z の値を求めなさい。

＜解答＞

コイルのインピーダンスを Z_L とすれば

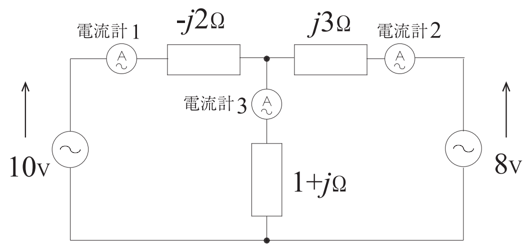
$$Z_L = j\omega L = j2\pi \cdot 50 \cdot (20 \cdot 10^{-3}) = j2\pi\ [\Omega]$$

並列接続の合成インピーダンス Z は

$$Z = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{j20\pi}{10 + j2\pi} = \frac{j20\pi(10 - j2\pi)}{(10 + j2\pi)(10 - j2\pi)}$$
$$= \frac{394.78 + j628.32}{139.48} = 2.83 + j4.50 \quad [\Omega]$$

と求まります。

＜問題 5-9 ＞ 下図に示す回路において電流計 1,2,3 の指示値をそれぞれ求めなさい。



＜解答＞

すでに，＜問題 5-7 ＞で求めた結果を極座標表現に直せば

$I_1 = 1.62 + j6.08 = 6.29\angle 75.08°$

$I_2 = 1.08 + j3.38 = 3.55\angle 72.28°$

$I_3 = 0.54 + j2.70 = 2.75\angle 78.69°$

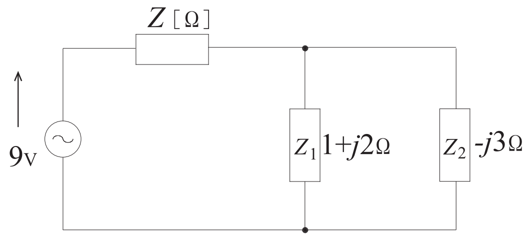
となります。極座標表現の $r\angle\theta$ の r の値が電流計の指示値となりますから各電流計の値は，以下のようになります。

電流計 1 ：6.29 [A]　　電流計 2 ：3.55 [A]　　電流計 3 ：2.75 [A]

＜問題 5-10 ＞ 以下の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1) 下図の回路において電源の電圧と電流が同相となるインピーダンス Z [Ω] の値を求めなさい。

(2) その Z [Ω] を挿入したときの電源から流れ出す電流を求めなさい。



＜解答＞

(1) 上図のように $Z_1 = 1 + j2$, $Z_2 = -j3$ とします。この合成インピーダンスは，

$$\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(1+j2)(-j3)}{1+j2-j3} = \frac{6-j3}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{9+j3}{2} = 4.5 + j1.5 \quad [\Omega]$$

となります。これに Z が直列に接続されていることになりますから，全体の合成インピーダンスは，

$4.5 + j1.5 + Z \quad [\Omega]$

となります。もし，この式で，$Z = -j1.5$ であれば，全体の合成インピーダンスは，4.5 [Ω] の抵抗分のみにとなりますから，電圧と電流は同相となります。

(2) 電源から流れ出す電流 I は，

$$I = \frac{9}{4.5} = 2 \quad [\mathrm{A}] \tag{5・1}$$

と求まります。

＜問題 5-11 ＞ 容量が 200μF のコンデンサに電圧 10V の交流電源を接続したところ電流計の指示が 0.6283($\approx \pi/5$) A であった。このときの電源の周波数を求めなさい。

＜解答＞

まず，コンデンサのインピーダンス Z_C は，

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi f \cdot 200 \times 10^{-6}} = -j\frac{2500}{\pi f}$$

となります。リアクタンス $X = 2500/(\pi f)$ であり，電流計の指示値 I は，E を X で割ればよいので，

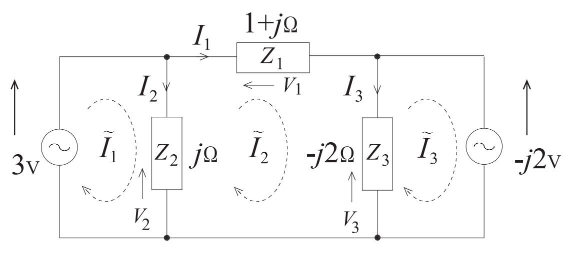
$$I = \frac{E}{X} = \frac{10\pi f}{2500}$$

となり，この値が 0.6283($\approx \pi/5$) であることから，周波数 f は

$$f = \frac{2500\pi}{5 \cdot 10\pi} = 50 \quad [\mathrm{Hz}]$$

と求まります。

＜問題 5-12 ＞ 下図に示す回路において各素子に流れる電流を求めなさい。ただし，Z_1, Z_2, Z_3 に流れる電流をそれぞれ I_1, I_2, I_3 とする。



＜解答＞

上図のような向きに閉路電流 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ をとり，各インピーダンス Z_1, Z_2, Z_3 の電圧降下 V_1, V_2, V_3 も図の向きとします。ここで，枝電流 I_1, I_2, I_3 と閉路電流 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ の関係は,

$$I_1 = \tilde{I}_2$$

$$I_2 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$$

$$I_3 = \tilde{I}_2 - \tilde{I}_3$$

となります。それぞれの閉路電流についての方程式は,

閉路電流１：$3 - V_2 = 0$ から,

$$\begin{aligned} 3 &= V_2 \\ &= j(\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2) \end{aligned}$$

$$\therefore 3 = j\tilde{I}_1 - j\tilde{I}_2$$

閉路電流２：$0 + V_2 - V_1 - V_3 = 0$ から,

$$\begin{aligned} 0 &= -V_2 + V_1 + V_3 \\ &= -j(\tilde{I}_2 - \tilde{I}_1) + (1+j)\tilde{I}_2 + (-j2)(\tilde{I}_2 - \tilde{I}_3) \end{aligned}$$

$$\therefore 0 = j\tilde{I}_1 + (1-j2)\tilde{I}_2 + j2\tilde{I}_3$$

閉路電流３：$V_3 - (-j2) = 0$ から,

$$\begin{aligned} -j2 &= V_3 \\ &= (-j2)(\tilde{I}_3 - \tilde{I}_2) \end{aligned}$$

$$\therefore -j2 = j2\tilde{I}_2 - j2\tilde{I}_3$$

クラメールの公式を用いるために，まず $\det Z$ は,

$$\det Z = \begin{vmatrix} j & -j & 0 \\ j & 1-j2 & j2 \\ 0 & j2 & -j2 \end{vmatrix} = 2 + j2$$

となります。したがって，クラメールの公式を用いて閉路電流 $\tilde{I}_1$ は,

$$\tilde{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -j & 0 \\ 0 & 1-j2 & j2 \\ -j2 & j2 & -j2 \end{vmatrix}}{2+j2} = \frac{-j10}{2+j2} = \frac{-j10}{2+j2} \times \frac{2-j2}{2-j2}$$
$$= \frac{-20-j20}{8} = -2.5-j2.5 \quad [\mathrm{A}]$$

となります。閉路電流 $\tilde{I}_2$ も同様に,

$$\tilde{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} j & 3 & 0 \\ j & 0 & j2 \\ 0 & -j2 & -j2 \end{vmatrix}}{2+j2} = \frac{-6-j4}{2+j2} = \frac{-6-j4}{2+j2} \times \frac{2-j2}{2-j2}$$
$$= \frac{-20+j4}{8} = -2.5+j0.5 \quad [\mathrm{A}]$$

と求まります。最後の閉路電流 $\tilde{I}_3$ も同様に,

$$\tilde{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} j & -j & 3 \\ j & 1-j2 & 0 \\ 0 & j2 & -j2 \end{vmatrix}}{2+j2} = \frac{-4-j2}{2+j2} = \frac{-4-j2}{2+j2} \times \frac{2-j2}{2-j2}$$
$$= \frac{-12+j4}{8} = -1.5+j0.5 \quad [\mathrm{A}]$$

となります。したがって，枝電流は,

$$I_1 = \tilde{I}_2 = -2.5+j0.5 \quad [\mathrm{A}]$$
$$I_2 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = -j3.0 \quad [\mathrm{A}]$$
$$I_3 = \tilde{I}_2 - \tilde{I}_3 = -1.0 \quad [\mathrm{A}]$$

と求まります。