

『経営のための意思決定論入門』

(佐々木康朗 著)

演習問題の解答

◆注意◆

- 本解答例は、「著作権法」によって、著作権等の権利が保護されています。本書の複製権・翻訳権・上映権・譲渡権・公衆送信権（送信可能化権を含む）は著作権者が保有しています。本解答例の全部または一部につき無断で転載、複写複製、電子的装置への入力等をされると、著作権等の侵害となる場合がありますので、ご注意ください。

第 1 章

略

第 2 章

2.1 (a) (マキシミン基準) C

(マキシマックス基準) A

(ハーヴィッツ基準) 楽観度を α ($0 \leq \alpha \leq 1$) とする。 α の値に応じて、以下の値が最大の選択肢を選べばよい。

$$A : 30 \times \alpha + 15 \times (1 - \alpha) = 15\alpha + 15$$

$$B : 25 \times \alpha + 18 \times (1 - \alpha) = 7\alpha + 18$$

$$C : 22 \times \alpha + 19 \times (1 - \alpha) = 3\alpha + 19$$

(ラプラス基準) 等確率を仮定すると、各選択肢の期待利得は以下のとおり。

$$A : (30 + 23 + 15) \div 3 = 68/3$$

$$B : (25 + 22 + 18) \div 3 = 65/3$$

$$C : (19 + 20 + 22) \div 3 = 61/3$$

したがって、A。

(ミニマックス・リグレット基準) 後悔度は表 A.1 のようになる。したがって、B。

表 A.1: 後悔度 (演習問題 2.1)

		状態 (市場の需要)		
		多 い	普 通	少 ない
選択肢 (製造量)	A : 10% 増産	0	0	7
	B : 増減なし	5	1	4
	C : 10% 減産	11	3	0

(b) (最尤未来基準) A

(要求水準基準) 例として、要求水準を 20 とするなら、C。

(期待利得最大化基準) 各選択肢の期待利得は以下のとおり。

$$A : 30 \times 0.2 + 23 \times 0.5 + 15 \times 0.3 = 22.0$$

$$B : 25 \times 0.2 + 22 \times 0.5 + 18 \times 0.3 = 21.4$$

$$C : 19 \times 0.2 + 20 \times 0.5 + 22 \times 0.3 = 20.4$$

したがって、A。

(c) 完全情報がない場合の最大期待利得は、22.0 である。一方、完全情報がある場合の最大期待利得は、

$$30 \times 0.2 + 23 \times 0.5 + 22 \times 0.3 = 24.1$$

である。したがって、完全情報の期待価値は、 $24.1 - 22.0 = 2.1$ 。

2.2 (a) 図 A.1 のとおり (図中の「なし」は 2 つ目のプロジェクトを実施しないことを指す)。

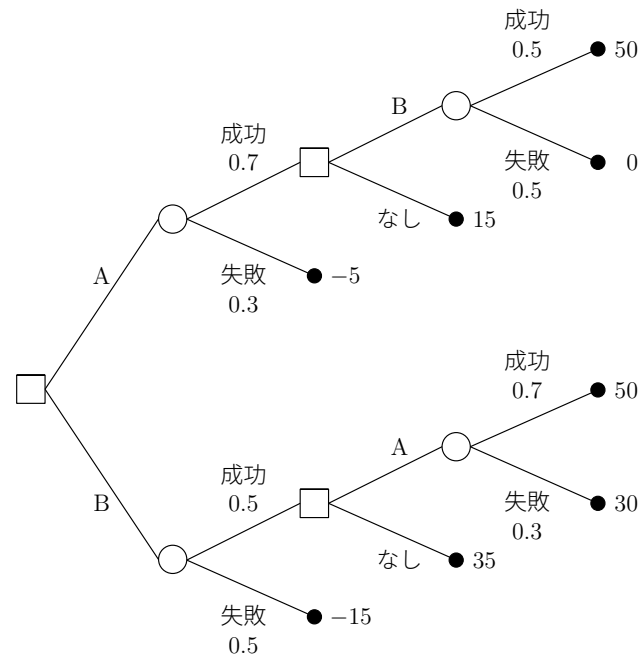


図 A.1: 演習問題 2.2 の決定木

(b) 図 A.2 のとおり。初めにプロジェクト A を実施し、それが成功したら続いてプロジェクト B を実施するのがよい。

(補足) 各プロジェクトの単独の期待利益は、プロジェクト B の方が大きい（プロジェクト A は 9 億円、プロジェクト B は 10 億円）。ここでの分析から、単純に期待利益の大きい方から実施することが良いとは限らないことが示唆される。

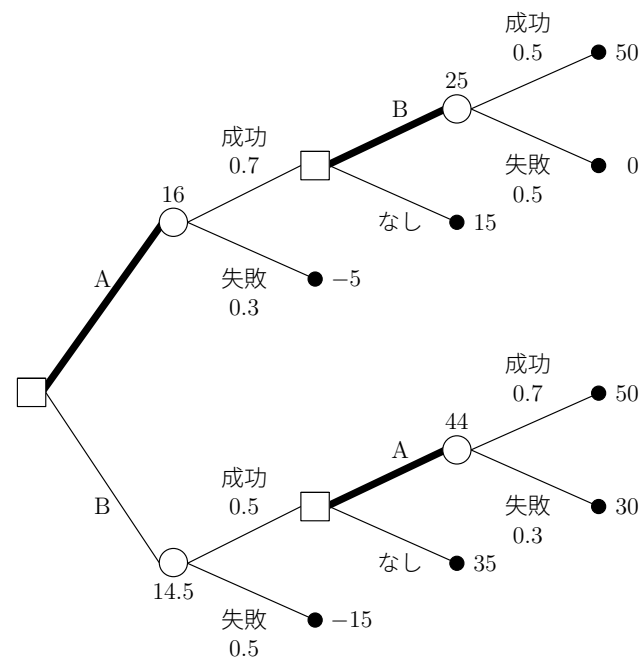


図 A.2: 図 A.1 の決定木に後ろ向き帰納法を適用

2.3 (a) まず、それぞれの予測を得る確率を求める。

$$\text{「好転」 予測を得る確率} : 0.4 \times 0.7 + 0.6 \times 0.3 = 0.46$$

$$\text{「悪化」 予測を得る確率} : 0.4 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7 = 0.54$$

よって、「好転」の予測を得た場合の事後確率は以下のとおり。

$$\text{「好転」 の確率} : 0.28/0.46 \approx 0.609$$

$$\text{「悪化」 の確率} : 0.18/0.46 \approx 0.391$$

また、「悪化」の予測を得た場合の事後確率は以下のとおり。

$$\text{「好転」 の確率} : 0.12/0.54 \approx 0.222$$

$$\text{「悪化」 の確率} : 0.42/0.54 \approx 0.778$$

「好転」の予測を得た場合、事後確率のもとでの各選択肢の期待利得は以下のとおり。

$$\text{プロジェクト A} : 5 \times 0.609 + (-5) \times 0.391 = 1.090$$

$$\text{プロジェクト B} : 2 \times 0.609 + 0 \times 0.391 = 1.218$$

同様に、「悪化」の予測を得た場合、事後確率のもとでの各選択肢の期待利得は以下のとおり。

$$\text{プロジェクト A} : 5 \times 0.222 + (-5) \times 0.778 = -2.780$$

$$\text{プロジェクト B} : 2 \times 0.222 + 0 \times 0.778 = 0.444$$

したがって、不完全情報がある場合の最大期待利得（事後確率のもとで期待利得最大化により達成できる期待利得）は、

$$1.218 \times 0.46 + 0.444 \times 0.54 \approx 0.800$$

となる（途中で四捨五入したため近似値になっているが、四捨五入しなければちょうど 0.8 になる）。一方、不完全情報がない場合の最大期待利得は 0.8 である。したがって、不完全情報の期待価値は、 $0.8 - 0.8 = 0$ 。

よって、エコノミストの予測を入手するのに支払ってよい費用は 0。つまり、どれだけ少額でも費用を支払う価値はない。

（補足）この場合、情報を入手しても、予測の内容によらずプロジェクト B を選ぶことになる。これは情報がない場合の選択と変わらないので、情報の価値は 0 になる。この程度の予測精度なら、この予測を入手するメリットはない、ということである。

- (b) 図 2.8 の決定木に、 $p_1 \sim p_6$ の値を当てはめ、後ろ向き帰納法を適用した結果を図 A.3 に示す。各不確実性ノードでの期待利得の計算は、(a) と同じである（それぞれどの計算に対応するか確認せよ）。予測を入手する場合としない場合で、いずれも期待利得が 0.8 となる。したがって、不完全情報の期待価値は 0 である。

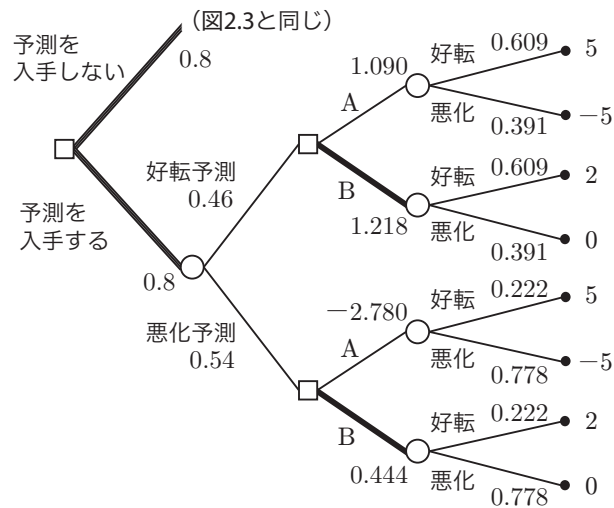


図 A.3: 演習問題 2.3 (b) の決定木に後ろ向き帰納法を適用

第 3 章

3.1 略

3.2 (a) $b_4, a_4, b_3, a_1, b_1, a_3$ の順に支配される戦略が消去される。その結果、 (a_2, b_2) の戦略の組だけが残る。

(b) (a_2, b_2)

(補足) 3.3 節で述べたように、支配可解であるゲームでは、支配される戦略の逐次消去により残る戦略の組は、そのゲームの唯一のナッシュ均衡になる。

3.3 図 A.4 のとおり。

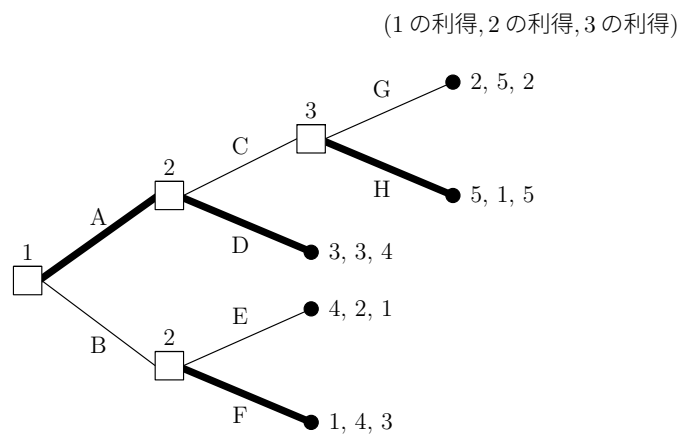


図 A.4: 図 3.28 の展開形ゲームに後ろ向き帰納法を適用

3.4 後ろ向き帰納法の結果は、図 A.5 のとおり。

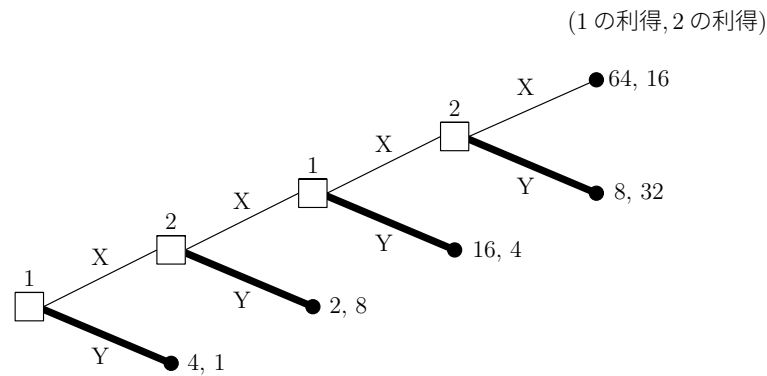


図 A.5: 図 3.29 の展開形ゲームに後ろ向き帰納法を適用

プレイヤー 1 は、後ろ向き帰納法に従って、最初に Y を選ぶべきだろうか？この問題には必ずしも正解はない。後ろ向き帰納法に従うことも 1 つの合理的な選択と言える。しかし、このゲームは、プレイヤーたちが X を選び続け、後ろに進むほど双方の利得が大きくなる。もしプレイヤー 1 が初めに X を選ぶと、次にプレイヤー 2 は、後ろ向き帰納法に従うならそこで Y を選ぶことになる。ところが、プレイヤー 2 は次のように考えるかもしれない。「プレイヤー 1 が X を選んだということは、プレイヤー 1 は後ろ向き帰納法のとおりを選ぶとは限らない。自分がここで X を選ぶと、プレイヤー 1 は次もまた X を選んでくれるかもしれない。そうすればお互いにより大きな利得が得られる。」そうしてプレイヤー 2 が X を選ぶ可能性もあると考えると、プレイヤー 1 にとって、初めに X を選ぶことも合理化できそうである。図 3.29 のゲームは、その形状からムカデゲームと呼ばれ、このように後ろ向き帰納法に従うことの可否を議論するためにしばしば用いられる。

3.5 (a) 利得表は表 A.2 のとおり。(純粋戦略の) ナッシュ均衡は、(投資する, 投資しない) と (投資しない, 投資する) の 2 つである。

表 A.2: 演習問題 3.5 のゲームの利得表

		D 社	
		投資する	投資しない
C 社	投資する	-5, -5	10, 0
	投資しない	0, 10	0, 0

(b) もし C 社、D 社の順に意思決定するなら、図 A.6 の展開形ゲームの状況となる。図 A.6 には後ろ向き帰納法の結果も示してあり、各社がこの通りに意思決定をすれば、C 社の利得は 10 である。一方、対称的に考えて、もし D 社、C 社の順に意思決定するなら、後ろ向き帰納法の結果、C 社の利得は 0 になる。よって、C 社は先に意思決定する方がよい。

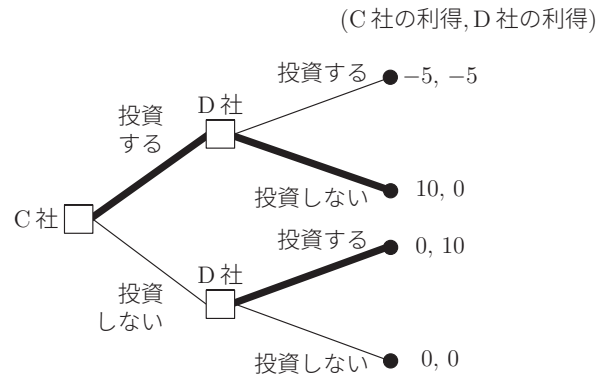


図 A.6: C 社が先に意思決定する場合のゲーム

3.6 戦略形表現の利得表は、表 A.3 のとおり。S 社の戦略について、「X-Y」は、最初のノードでの選択が X、最初に「撤退しない」を選ぶ場合の次のノードでの選択が Yであることを表す。このゲームのナッシュ均衡は、(撤退する - 維持, 引き下げ) と (撤退する - 引き下げ, 引き下げ) の 2 つである。

表 A.3: 図 3.19 のゲームの戦略形表現

		T 社	
		維 持	引き下げ
S 社	撤退しない - 維持	5, 5	2, 7
	撤退しない - 引き下げ	7, 2	3, 3
	撤退する - 維持	5, 7	5, 7
	撤退する - 引き下げ	5, 7	5, 7

図 3.19 のゲームの部分ゲームは、全体のゲームと、S 社が「撤退しない」を選択した後のノードから始まる部分ゲームの 2 つであった (図 3.20)。前者の全体のゲームのナッシュ均衡は、上で求めた 2 つの戦略の組である。一方、後者の部分ゲームのナッシュ均衡は、両社とも引き下げを選択することである。したがって、どちらの部分ゲームにおいてもナッシュ均衡が達成されるのは、(撤退する - 引き下げ, 引き下げ) のみである。これがこのゲームの部分ゲーム完全均衡であり、たしかに拡張された後ろ向き帰納法の結果 (図 3.22) と同じである。

第 4 章

- 4.1 (加重和法) 4.2 節の表 4.2 では、C 氏は弱パレート最適であるが、パレート最適ではない。ここで、「実績」の重みを 1、他の目的の重みをいずれも 0 とすると、C 氏は利得の加重和が最大となる (B 氏も加重和が最大になる)。
- (制約化法) 同様に 4.2 節の表 4.2 において、「年齢」と「統率力」を制約化して、いずれもしきい値を 3 とすると、どの選択肢もこの制約をクリアする。そして、「実績」の利得が最大となる C 氏が選ばれる (B 氏も選ばれる)。
- (マキシミン法) 表 A.4 で、B 氏は弱パレート最適であるが、パレート最適ではない。しかし、マキシミン法では B 氏が選ばれる (A 氏も選ばれる)。

表 A.4: 目的が 2 つのリーダー選択の利得表

選択肢	目的	
	実 績	年 齢
	A 氏	10
B 氏	5	5
C 氏	1	10

4.2 略

4.3 (a) $a = 9$

(b) 重みは以下のとおり。なお、 $\sqrt[3]{1/15} = 1/\sqrt[3]{15}$ である。

$$X : \sqrt[3]{15} / (\sqrt[3]{15} + 1 + \sqrt[3]{1/15}) \approx 0.637$$

$$Y : 1 / (\sqrt[3]{15} + 1 + \sqrt[3]{1/15}) \approx 0.258$$

$$Z : \sqrt[3]{1/15} / (\sqrt[3]{15} + 1 + \sqrt[3]{1/15}) \approx 0.105$$

整合度は約 0.019 となり (計算は略)、したがって整合比は、表 4.13 のランダム指標を用いて

$$\frac{0.019}{0.525} \approx 0.036$$

となる。0.1 以下なので許容範囲である。

第 5 章

5.1 メンバーは表 5.1 に示す評価を持っており、多数決で各自が最も好ましい選択肢に投票するなら、集団として B を選ぶ結果になる (5.2 節で述べたとおり)。つまり、集団として B を C より高く評価する。

ここで、「D、C、A、B の順に良い」と評価している真ん中の「5 人」が全員、「C、D、A、B の順に良い」に評価を変えたとする。他は皆、評価は変わらないとして、多数決を行うと、C が最多の 13 票を得て選ばれる。B と C の相対的な評価は誰も変わっていないのに、集団としての B と C の相対的な評価は逆転したことになる。

5.2 「D、C、A、B の順に良い」と評価している真ん中の「5 人」のうちのある 1 人をメンバー X とする。同じくこの「5 人」に含まれる他のメンバーのうち 1 人が C に投票し (これは虚偽の評価の申告である)、その他は全員、最も好ましい選択肢に投票する場合、X は、もし真の評価のとおり D に投票すると、B と C がともに 9 票で最多となり、アルファベット順で B が選ばれる。しかし、ここで X が C に投票すると、C が最多の 10 票を得て選ばれる。X にとっては、虚偽の評価を申告することで自身にとってより好ましい選択肢が選ばれることになる。

5.3 略

第 6 章

- 6.1 (a) 式 (6.3) に、制約条件 $x + y \leq 80$ を追加した最適化問題となる。実行可能領域は図 A.7 のとおり。最適解は、2 直線 $y = -3x + 180$ と $y = -x + 80$ の交点 Q、すなわち $(x, y) = (50, 30)$ である。図中の点線は、最適解の点を通る目的関数の直線である（次の図 A.8 も同様）。

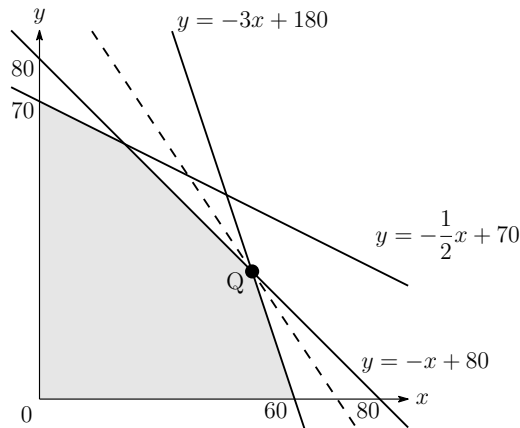


図 A.7: 演習問題 6.1 (a) の実行可能領域と最適解

- (b) 式 (6.3) に、制約条件 $x + y \leq 100$ を追加した最適化問題となる。実行可能領域は図 A.8 のとおり。この場合、実行可能領域は元の問題（式 (6.3)）と変わらない。したがって、最適解も元の問題と同じで、図 A.8 の点 P、すなわち $(x, y) = (44, 48)$ である。

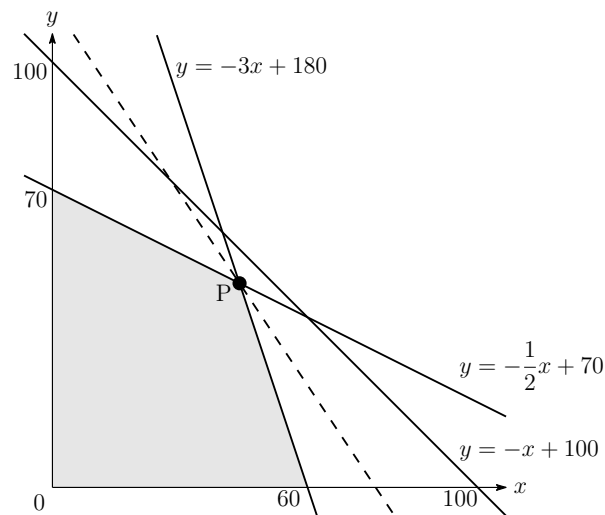


図 A.8: 演習問題 6.1 (b) の実行可能領域と最適解

- 6.2 実行可能領域は図 A.9 のようになる（境界線上を含む）。目的関数の値を z とすると、 $z = 8x + 12y$ である。ここでは z を最小化したいので、6.3 節の例とは逆に、目的関数の直線（傾きは $-2/3$ ）が、実行可能領域上の点を含む範囲で、なるべく原点に近づくように移動させる。結果、2 直線 $y = -x + 10$ と $y = -(1/2)x + 7$ の交点 R、すなわち $(x, y) = (6, 4)$ が最適解である。図 A.9 の点線は、点 R を通る目的関数の直線である。

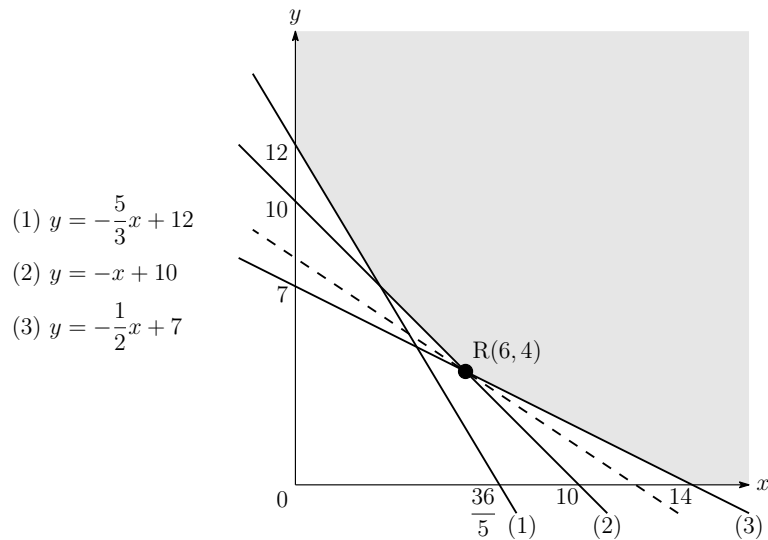


図 A.9: 演習問題 6.2 の実行可能領域と最適解

6.3 (a) 以下の最適化問題として定式化できる。

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化} \quad x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \\
 &\text{制約条件} \quad \begin{cases} \frac{x_{A1}}{6} + \frac{x_{B1}}{11} + \frac{x_{C1}}{10} = 1 \\ \frac{x_{A2}}{6} + \frac{x_{B2}}{8} + \frac{x_{C2}}{8} = 1 \\ \frac{x_{A3}}{6} + \frac{x_{B3}}{9} + \frac{x_{C3}}{11} = 1 \\ x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 8 \\ x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 8 \\ x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} \leq 8 \\ x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

目的関数は 3 人の従業員の仕事時間の合計であり、これを最小化する。制約条件のうち、1 つ目～3 つ目は、各仕事を完了しなければならないという制約を表す。4 つ目～6 つ目は、各従業員の仕事時間の制約を表す。7 つ目は変数の非負制約である。

(b) 答えのみ表 A.5 に示す。

表 A.5: 演習問題 6.3 の最適解（各仕事を行う時間）

	仕事 1	仕事 2	仕事 3
従業員 A	6	0	2
従業員 B	0	0	6
従業員 C	0	8	0

第7章

7.1 (a) 状況 A では、効用は $\sqrt{2000} = 44.7$ である。一方、状況 B の期待効用は、

$$\sqrt{3000} \times 0.5 + \sqrt{1000} \times 0.5 = 54.8 \times 0.5 + 31.6 \times 0.5 = 43.2$$

である。したがって、状況 A を選ぶ。

状況 B の確実性等価は、 $43.2^2 \approx 1866$ 円である。リスクプレミアムは、 $2000 - 1866 = 134$ 円である。

(b) 期待効用は、

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \times \frac{1}{2} + \sqrt{2^2} \times \frac{1}{2^2} + \sqrt{2^3} \times \frac{1}{2^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \approx 2.414 \end{aligned}$$

となる。確実性等価は、 $(2.414)^2 \approx 5.827$ 円である。したがって、参加費が 5 円以下であれば、このゲームに参加すべきである。

7.2 金額のみに関心がある場合を考えると、リスク愛好的なら宝くじを購入することが、リスク回避的なら保険に加入することが、それぞれ合理的になり得る。また、宝くじの場合は、金額以外の要因（たとえば、当たるかどうかの緊張感を楽しみたい、他人と話題を共有したい）が効用に影響することもある。そのような効用のもとで宝くじの購入が合理的になることはあり得る。

7.3 日中に買い物する客の中には、フレーミング効果により、A の場合は購入しても、B の場合には割高に感じて購入しないような客もいると考えられるため。