## 章末問題の解答

### ■力 学 編■

#### ● 第 1 章

**問題 1**　与式をそれぞれ 2 乗して，加えると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t$$

$\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$ を用いて $t$ を消去すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

すなわち，この質点はだ円形の軌道を描いて運動します．

**問題 2**　40〔km/h〕= 40 ×（1 000/3 600）〔m/s〕= 11.11〔m/s〕

1 秒間に 0.5 m/s ずつ加速するので，11.11 m/s になるまでに要する時間は $t=$ 22.2〔s〕．よって

$$x=\int_0^{22.2}v\,dt=\int_0^{22.2}at\,dt=\left[\frac{1}{2}\,0.5\,t^2\right]_0^{22.2}=\frac{1}{4}\,22.2^2=123.5\,〔\mathrm{m}〕$$

**問題 3**　ブレーキをかけ始めてからの時間を $t$，加速度を $a$ とすると，速度 $v$ は，

$$v=V-at$$

静止するまでの時間 $t_e$ は，$0=V-at_e$ より

$$t_e=\frac{V}{a}$$

となります．また

$$L=\int_0^{t_e}(V-at)\,dt=\left[Vt-\frac{1}{2}at^2\right]_0^{t_e}=Vt_e-\frac{1}{2}at_e{}^2$$

より

$$V\frac{V}{a}-\frac{1}{2}a\frac{V^2}{a^2}=L$$

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{a}=L$$

$$\therefore\quad a=\frac{V^2}{2L}=\frac{(270/3.6\,〔\mathrm{m/s}〕)^2}{2\times4\,000\,〔\mathrm{m}〕}=0.7\,〔\mathrm{m/s^2}〕$$

**問題 4**　平均的な加速度の大きさは 50〔m/s〕/6〔s〕= 8.33〔m/s$^2$〕

力の大きさは $F$ = 120 × 8.33 = 1 000〔N〕

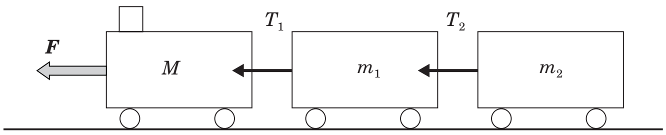
**問題 5**　機関車に作用する力 $F$ によって機関車と 2 台の台車が動くことから，全体の加速度は力 $F$ を質量の合計で割った値となります．

$$a=\frac{F}{M+m_1+m_2}$$

一方，各台車に作用する力は

$$T_1=\frac{(m_1+m_2)F}{M+m_1+m_2}$$

$$T_2=\frac{m_2F}{M+m_1+m_2}$$




**問題 6**　雨粒の質量を $m$ とし，$t$ 秒後の速度を $v$ とします．空気抵抗は $-kmv$ ですから，運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-kmv$$

$u=v+g/k$ とおいて，上式を解くと，速度，位置，終速度はそれぞれ以下のようになります．

$$u=ce^{-kt}$$

ここに，$c$：積分定数．よって

$$v=-\frac{g}{k}+\left(v_0+\frac{g}{k}\right)e^{-kt}$$

$$y=-\frac{g}{k}t+\frac{1}{k}\left(v_0+\frac{g}{k}\right)(1-e^{-kt})$$

$$v\to-\frac{g}{k}$$

**問題 7**　$y=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

に $t=5$〔s〕，$y=0$〔m〕，$h=20$〔m〕を代入して

$$v_0=\frac{1}{2}gt-\frac{h}{t}=\frac{1}{2}\times 9.81\,〔\mathrm{m/s^2}〕\times 5\,〔\mathrm{s}〕-\frac{20\,〔\mathrm{m}〕}{5\,〔\mathrm{s}〕}=20.5\,〔\mathrm{m/s}〕$$

角度 30 度でなげた場合は

$$y=h+v_0\sin\theta\, t-\frac{1}{2}gt^2$$

より

$$v_1=\left(\frac{1}{2}gt-\frac{h}{t}\right)\frac{1}{\sin\theta}=\left(\frac{1}{2}\times 9.81\,〔\mathrm{m/s^2}〕\times 3\,〔\mathrm{s}〕-\frac{20}{3}\right)\frac{1}{\sin 30^\circ}=16.1\,〔\mathrm{m/s}〕$$

落下時間を 5 秒にするには

$$v_1=\left(\frac{1}{2}gt-\frac{h}{t}\right)\frac{1}{\sin\theta}=\left(\frac{1}{2}\times 9.81\,〔\mathrm{m/s^2}〕\times 5\,〔\mathrm{s}〕-\frac{20}{5}\right)\frac{1}{\sin 30^\circ}=41.1\,〔\mathrm{m/s}〕$$

**問題 8**　$y=v_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2$

$F=-mg$ より

$$W=\int_{y_1}^{y_2}-mgdy$$

数値を代入すると

| 時刻 | 位置座標〔m〕 | 各位置における仕事〔J〕 | 一秒ごとの仕事〔J〕 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0.995 | −19.52 | −19.52 |
| 2 | −7.82 | 153.43 | 172.95 |
| 3 | −26.445 | 518.85 | 365.42 |
| 4 | −54.88 | 1076.75 | 557.9 |
| 5 | −93.125 | 1827.11 | 750.36 |

**問題 9**　太陽からの脱出速度は

$$V_s=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\,〔\mathrm{m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}〕\times 1.99\times 10^{30}\,〔\mathrm{kg}〕}{1.5\times 10^{11}\,〔\mathrm{m}〕}}$$

$$=42\,068.7\,〔\mathrm{m/s}〕=42.1\,〔\mathrm{km/h}〕$$

地球の公転運動による遠心力と太陽の引力がつり合っているので，

$$m\frac{V_E{}^2}{R}=G\frac{mM}{R^2}$$

地球の公転運動による速度は

$$V_E=\sqrt{G\frac{M}{R}}=\sqrt{\frac{6.67\times 10^{-11}\,〔\mathrm{m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}〕\times 1.99\times 10^{30}\,〔\mathrm{kg}〕}{1.5\times 10^{11}\,〔\mathrm{m}〕}}$$

$$=29\,747.0\,〔\mathrm{m/s}〕=29.7\,〔\mathrm{km/h}〕$$

したがって地球の公転運動も考慮した脱出速度は

$V = V_s - V_E$

となります．

よって，地球の重力場からの脱出速度はエネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mV_3{}^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mV^2$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{2GM}{r} + V^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\,[\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}]\times 5.97\times 10^{24}\,[\mathrm{kg}]}{6.36\times 10^{6}\,[\mathrm{m}]} + (42\,068.7\,[\mathrm{m}] - 29\,747.0\,[\mathrm{m}])^2}$$

$$= 16\,644.64\,[\mathrm{m/s}] = 16.7\,[\mathrm{km/s}]$$

**問題 10** $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

より数値を代入して

5 cm：$1.334\times 10^{-8}$〔N〕

1 mm：$6.67\times 10^{-7}$〔N〕

30 cm：$2.223\times 10^{-7}$〔N〕

**問題 11** 始点 A から終点 B までの仕事は，

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と表せます．

経路Ⅰの仕事は，点 A から点 P までの仕事と点 P から点 B までの仕事を足し合せたものです．前者の場合（点 A→点 P），力は $F_x$，距離は $h$ であり，後者の場合（点 P→点 B），力は $F_y$，距離は $k$ であるので，経路Ⅰの仕事を $W_I$ とすると

$$W_I = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_x(x,\ y)h + F_y(x+h,\ y)k$$

同様に，経路Ⅱによる仕事 $W_{II}$ は

$$W_{II} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_y(x,\ y)k + F_x(x,\ y+k)h$$

力が保存力であるためには，$W_I = W_{II}$ でなければならないことから，次式が成立します．

$$F_x(x,\ y)h + F_y(x+h,\ y)k = F_y(x,\ y)k + F_x(x,\ y+k)h$$

$$[F_x(x,\ y+k) - F_x(x,\ y)]h = [F_y(x+h,\ y) - F_y(x,\ y)]k$$

ここで

$$F_x(x,\ y+k)-F_x(x,\ y)=\frac{\partial F_x(x,\ y)}{\partial y}k$$

$$F_x(x,\ y+k)-F_x(x,\ y)=\frac{\partial F_x(x,\ y)}{\partial y}k$$

であるから

$$\frac{\partial F_x(x,\ y)}{\partial y}=\frac{\partial F_y(x,\ y)}{\partial x}$$

**問題 12** エネルギーの保存則を考慮すると

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kr^2$$

また，遠方では $v=0$ であるから

$$r\leqq\pm v_0\sqrt{m/k}$$

となります．すなわち

$$r=|v_0\sqrt{m/k}|$$

まで遠ざかることができます．

**問題 13** おもりの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+m(g-a)$$

です．

$$u=-\frac{k}{m}x+(g-a)$$

とおいて，これを解くと

$$x=\frac{mg}{k}+\frac{ma}{k}(-1+\cos\omega t)$$

**問題 14** たとえば，$L_x=L_y=0$，$L_z\neq 0$ の場合を考えます．

$$yp_z-zp_y=0\ ,\quad zp_x-xp_z=0$$

第 1 式に $x$ を，第 2 式に $y$ をかけ，加えると

$$xyp_z-xzp_y+yzp_x-xyp_z=0$$

$$-xzp_y+yzp_x=0$$

$$-z(xp_y-yp_x)=0$$

一方

$$L_z=(xp_y-yp_x)\neq 0$$

ですから，上式が成立するためには

$z=0$

すなわち，質点はつねに平面 $z=0$ 上になければなりません．

**問題 15** 衝突前後で，壁に直角な方向の速度は $v\cos\theta$ であるので，運動量の変化は $2mv\cos\theta$ です．壁の受ける力積の大きさは作用・反作用の法則からこれに等しい．したがって，力積は $\theta=0$ の時に最大となります．

**問題 16** おもりが傾くということは水平方向に見かけの力が作用していることを示していて，列車が加速運動していることがわかります．糸の張力を $T$，列車の加速度を $a$ とすると

$ma=T\sin\theta$

$T\cos\theta=mg$

$T$ を消去すると

$$a=\frac{\sin\theta}{m}\frac{mg}{\cos\theta}=g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

**問題 17** トロッコの運動方向と直角方向に飛び降りたとすると，運動方向に力が作用しないので，運動量は変化しないから，運動量保存則を適用すれば

$P=(m+m_1+m_2)V=(m+m_1)V'$

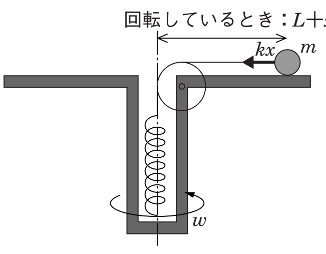
したがって

$$V'=\frac{(m+m_1+m_2)}{(m+m_1)}V$$

## ● 第 2 章

**問題 1** ばねが $x$ 伸びたとすると，おもりの回転半径は $L+x$ になります．このときの等速円運動の運動方程式は

$m(L+x)\omega^2=kx$（$kx$：ばねの反発力）




これを解いて $x$ を求めます．

$mL\omega^2+m\omega^2x=kx$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{mL\omega^2}{k-m\omega^2}$$

装置中心からおもりまでの距離は

$$L+x=L+\frac{mL\omega^2}{k-m\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad =\frac{kL}{k-m\omega^2}$$

**問題 2**　初速度 $v_0$，加速度 $a$ として


$$v = v_0 + at \qquad ①$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad ②$$

①より

$$t = \frac{(v - v_0)}{a}$$

これを②に代入すると

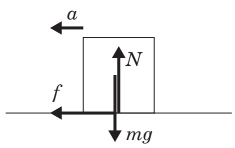
$$x = v_0\frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax = 2v_0 v - 2v_0{}^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0{}^2$$
$$= v^2 - v_0{}^2$$

これと，$x = 80$ cm，$v_0 = 3.0$ m/s，$v = 2.0$ m/s より

$$a = \frac{v^2 - v_0{}^2}{2x} = -3.1\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

運動方程式より，動摩擦係数は




$$ma = -f$$
$$= -\mu N \text{（クーロン摩擦）}$$
$$= -\mu mg$$

$$\therefore \quad \mu = -\frac{a}{g} = 0.32$$

$$f = -ma = 0.40\ \text{〔kg〕} \times 3.1\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$
$$= 1.3\ \text{〔N〕}$$

途中は $a = -3.125$〔m/s²〕で計算しています（力学的エネルギー保存則を使っても計算できます）．

摩擦力のした仕事は力学的エネルギー保存則から求めるのが簡単です．

摩擦力のした仕事＝(はじめの力学エネルギー)－(後の力学エネルギー)

$$= \frac{1}{2} \times 0.40\ \text{〔kg〕} \times (3.0\ \text{〔m/s〕})^2 - \frac{1}{2} \times 0.40\ \text{〔kg〕} \times (2.0\ \text{〔m/s〕})^2$$
$$= 1.0\ \text{〔J〕}$$

**問題 3**　衝突後の球 A，B の速度を $v_A{}'$，$v_B{}'$ とする．

運動量保存則により

$$3m \cdot v + m \cdot 3v = 3mv_A{}' + mv_B{}' \qquad ①$$

反発の法則より

$$e = -\frac{v_B{}' - v_A{}'}{3v - v} = \frac{v_A{}' - v_B{}'}{2v} \qquad ②$$

②より

$$v_A{}' - v_B{}' = 2ev$$

$$\Leftrightarrow \quad v_B{}' = v_A{}' - 2ev \qquad ③$$

これを①に代入し

$$6mv^2 = 3mv_A{}' + m(v_A{}' - 2ev)$$

$$= 4mv_A{}' - 2emv$$

$$v_A{}' = \frac{3+e}{2}v$$

③に代入し

$$v_B{}' = \frac{3+e}{2}v - 2ev$$

$$= \frac{3-3e}{2}v$$

衝突前後の運動エネルギーの差は

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv^2 + \frac{1}{2}m\cdot(3v)^2 - \left\{\frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\left(\frac{3+e}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m\cdot\left(\frac{3-3e}{2}v\right)^2\right\}$$

$$= 6mv^2 - \left(\frac{27+18e+3e^2}{8}mv^2 + \frac{9-18e+9e^2}{8}mv^2\right)$$

$$= 6mv^2 - \frac{36+12e^2}{8}mv^2$$

$$= \frac{3-3e^2}{2}mv^2$$

(1) $e = 1$ のとき

$v_A{}' = 2v$, $v_B{}' = 0$, 運動エネルギーの減少 $= 0$

(2) $e = 0$ のとき

$v_A{}' = v_B{}' = \dfrac{3}{2}v$, 運動エネルギーの減少 $= \dfrac{3}{2}mv^2$

(3) $e = 0.50$ のとき

$v_A{}' = 1.8v$, $v_B{}' = 0.75v$, 運動エネルギーの減少 $= 1.1mv^2$

**問題 4**　静かにつるしてつり合った位置の自然長からの伸びを $l$ とするとばね定数 $k$ は

$$kl = mg \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{mg}{l}$$

と求められます．振動しているときの運動方程式は，自然長の位置を原点，下向きを正として

$$ma = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

と表せるので，おもりの運動は単振動の式

$$x = \frac{mg}{k} + A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$$

と表されます．ここで，$k = \dfrac{mg}{l}$ より $\dfrac{mg}{k} = l$ なので，

$$x = l + A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$$

とも表されます．周期は

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0.51\,〔\mathrm{s}〕$$

振幅 $A = 15$ mm なので，おもりの速度は

$$\frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$$

と表され，最高速度は

$$A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\sqrt{\frac{g}{l}} = 0.18\,〔\mathrm{m/s}〕$$

周期が $2\pi\sqrt{m/k}$ と表されますから，質量が半分になると周期は $\sqrt{1/2} = 0.707$ 倍になります（周期が $2\pi\sqrt{l/g}$ と表されるから，$m$ が変わっても変わらないという答えはまちがいです．$m$ が変わると $l$ が変わります）．

**問題 5**　衝突前の A の速度を $v$ とする．力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl\,(1 - \cos\theta)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad v &= \sqrt{2gl\,(1-\cos\theta)}\\ &= \sqrt{2\times 9.81\,〔\mathrm{m/s^2}〕\times 0.80\,〔\mathrm{m}〕\times(1-\cos 30^\circ)}\\ &= 1.5\,〔\mathrm{m/s}〕\end{aligned}$$

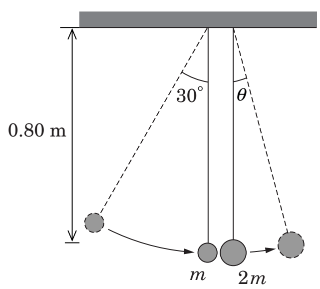
衝突後の A，B の速度を $v_A$，$v_B$ とします．運動量保存則により

$$mv = mv_A + 2mv_B \qquad ①$$

反発の法則により

$$e = -\frac{v_B - v_A}{-v} \quad\Leftrightarrow\quad v_B - v_A = ev$$

$$\Leftrightarrow\quad v_B = v_A + ev \qquad ②$$




①，②より

$$mv = mv_A + 2m(v_A + ev)$$
$$= 3mv_A + 2emv$$
$$\Leftrightarrow \quad v_A = \frac{1-2e}{3}v = 0.44 \text{〔m/s〕}$$
$$v_B = \frac{1-2e}{3}v + ev = \frac{1+e}{3}v = 0.94 \text{〔m/s〕}$$

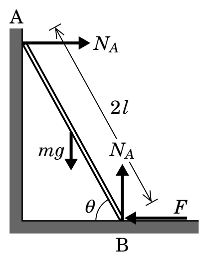
衝突後にBが振り上がる角度を $\theta$ とすると，力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_B{}^2 = 2mgl(1-\cos\theta)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = 1 - \frac{v_B{}^2}{2gl}$$
$$= 0.94$$
$$\therefore \quad \theta = 19^\circ$$

周期 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1.8$〔s〕

## ● 第3章

**問題1**　摩擦がないときは，右図よりつり合いの式




$$N_A - F = 0$$
$$N_B - mg = 0$$
$$N_A\cdot 2l\sin\theta - mg\cdot l\cos\theta = 0$$

（B点まわりのモーメントのつり合い）

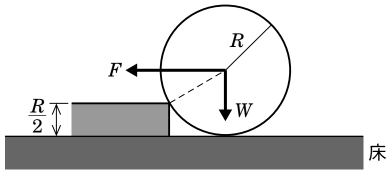
以上より

$$F\cdot 2l\sin\theta = mgl\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \quad F = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}mg = \frac{1}{2}mg\cot\theta$$

摩擦があるときは，$F$ が摩擦力で置き換えられます．滑らないための条件は

$$F < \mu_s N_B$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}mg\cot\theta < \mu_s mg$$
$$\Leftrightarrow \quad \tan\theta > \frac{1}{2\mu_s}$$

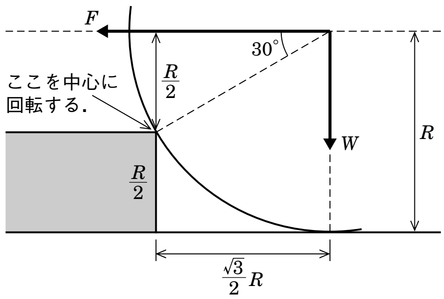
**問題 2**　障害物の角に接触してそこを中心に回転するので，角を回転支点と考えられます．




角まわりのモーメント＝0のとき

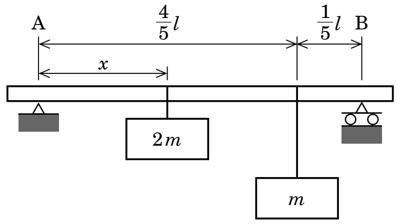
$$\frac{1}{2}rF - \frac{\sqrt{3}}{2}W = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F = \sqrt{3}\,W$$




したがって，$\sqrt{3}\,W$ 以上の水平力を作用させれば障害物を乗り越えられます．

**問題 3**　支点 A，B での反力を $R_A$，$R_B$ とします．




力のつり合い（鉛直方向）

$$R_A + R_B - 2mg - mg = 0 \qquad ①$$

A 点まわりのモーメントのつり合い

$$R_A \cdot 0 - 2mg \cdot x - mg \cdot \frac{4}{5}l + R_B \cdot l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R_B = \left(\frac{4}{5} + \frac{2x}{l}\right)mg$$

①に代入して

$$R_A = 3mg - \left(\frac{4}{5} + \frac{2x}{l}\right)mg$$

$$= \left(\frac{11}{5} - \frac{2x}{l}\right)mg$$

$R_A$ と $R_B$ が等しくなるためには

$$\left(\frac{11}{5} - \frac{2x}{l}\right)mg = \left(\frac{4}{5} + \frac{2x}{l}\right)mg$$

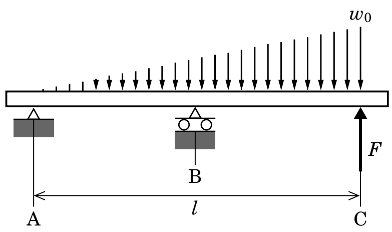
$$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{5} - \frac{2x}{l} = \frac{4}{5} + \frac{2x}{l}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x}{l} = \frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{20}l$$

**問題 4**　分布力の式は，支点 A を原点とすると

$$w(x)=\frac{w_0}{l}x$$




と書けます．A，B 点の反力を $R_A$，$R_B$ と書くと，図の縦方向の力のつり合いより

$$R_A+R_B+F=\int_0^l w(x)\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow\quad R_A+R_B+F=\frac{1}{2}w_0 l=0 \qquad ①$$

また，A 点まわりのモーメント = 0（回転支点）により

$$R_A\cdot 0+\frac{1}{2}l\cdot R_B+lF-\int_0^l xw(x)\,dx=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}R_B\cdot l+Fl-\frac{1}{3}w_0 l^2=0 \qquad ②$$

$l\neq 0$ より

$$\frac{1}{2}R_B+F-\frac{1}{3}w_0 l=0$$

$$\Leftrightarrow\quad R_B=\frac{2}{3}w_0 l-2F$$

②を①に代入して

$$R_A-F+\frac{1}{6}w_0 l=0$$

$$\Leftrightarrow\quad R_A=F-\frac{1}{6}w_0 l$$

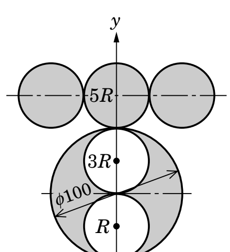
支点 A，B からはりが浮き上がらない条件は

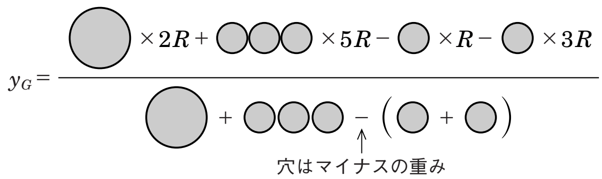
$$R_A>0 \text{ かつ } R_B>0$$

$$\Leftrightarrow\quad F-\frac{1}{6}w_0 l>0 \text{ かつ } \frac{2}{3}w_0 l-2F>0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{6}w_0 l<F<\frac{1}{3}w_0 l$$

**問題 5**　右図のように座標を定めます．板の質量は板の面積に比例するので，板（円）の面積を重みにして加重平均します．





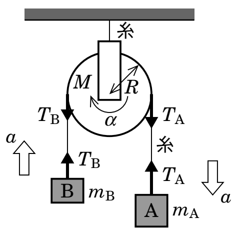

$$= \frac{4\pi R^2 \times 2R + 3\pi R^2 \times 5R - \pi R^2 \times R - \pi R^2 \times 3R}{4\pi R^2 + 3\pi R^2 - 2\pi R^2}$$

$$= \frac{8R + 15R - R - 3R}{5}$$

$$= \frac{19}{5}R = \frac{19}{10} \times 50\ \mathrm{mm} = 95\ \mathrm{mm}$$

よって重心は下端から上に 95 mm の位置です．

**問題 6**　右図のように記号を定めます．




運動方程式

A：$m_A a = m_A g - T_A$　①

B：$m_B a = T_B - m_B g$　②

滑車：$I\alpha = R(T_A - T_B)$　③

滑車の慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \qquad ④$$

滑車の角加速度と A，B の加速度との関係は

$$a = R\alpha \iff \alpha = \frac{a}{R} \qquad ⑤$$

④と⑤を③に代入すると

$$\frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} = R(T_A - T_B)$$

$$\iff \frac{1}{2}Ma = T_A - T_B \qquad ⑥$$

①＋②＋⑥より $T_A$ と $T_B$ が消える．よって

$$\left(\frac{1}{2}M + m_A + m_B\right)a = m_A g - m_B g$$

$$\iff a = \frac{m_A - m_B}{\frac{1}{2}M + m_A + m_B}g$$

**問題 7**　半円の直径まわりは図の $x$ 軸まわりだから，

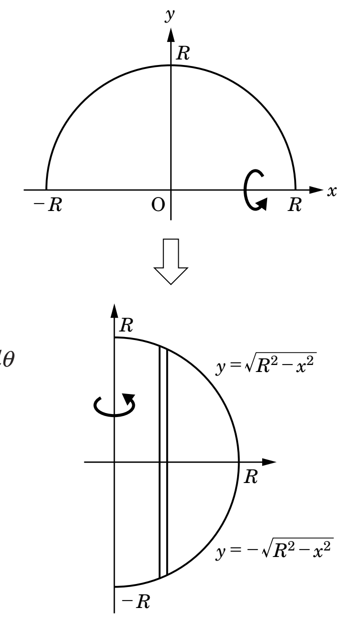
$I_x$ = 右下図の $I_y$

$$= 2\int_0^R \rho x^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

ここに $\rho$：面密度．$x = R\sin\theta$ とおくと

$dx = R\cos\theta\, d\theta$

| $x$ | $0 \to R$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0 \to \frac{\pi}{2}$ |




$$\therefore\ I_x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho R^2 \sin^2\theta \cdot \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta} \cdot R\cos\theta d\theta$$

$$= 2\rho R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$= 2\rho R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2} R^4 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

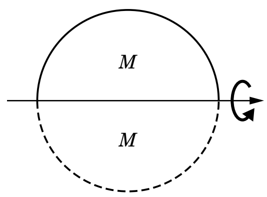
$$= \frac{\rho}{8} R^4 \pi$$

$M = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho$ より $e = \frac{2M}{\pi R^2}$　　$\therefore\ I_x = \frac{1}{4} MR^2$

対称軸周りの慣性モーメントは円板の慣性モーメントの半分だから，結局 $I_x$ と同じ（$I_y = I_x$）．

［別解］

$I_x$ は円板の慣性モーメントの半分．円板の直径まわりの慣性モーメントは




$$\frac{1}{4} mr^2$$

なので

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(2M)R^2 = \frac{1}{4} MR^2$$

## ❏❏ 章末問題の解答 ❏❏

## ■数 学 編■

### ● 第 1 章

**問題 1**

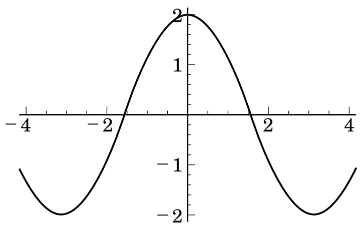
(1) $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

(2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1}{2}$

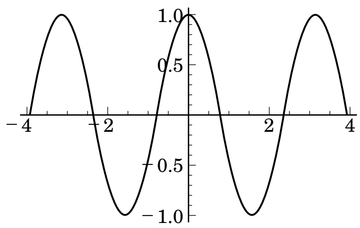
(3) $\sin\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{-1}{2}$

(4) $\cos\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

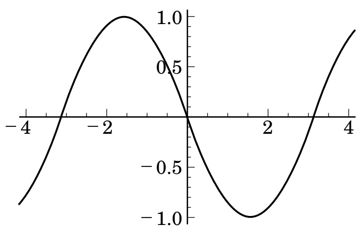
**問題 2** (1) $y=2\cos\theta$



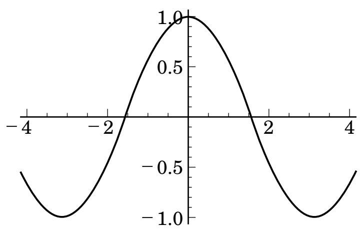

(2) $y=\cos 2\theta$




**問題 3** (1) $y=\sin(-\theta)$




(2) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$




**問題 4**

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

**問題 5**　$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\ \dfrac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

## ● 第 2 章

**問題 1**

(1)　$\boldsymbol{p}=(1,\sqrt{3})$，　$\boldsymbol{q}=(-2,\sqrt{3})$

(i)　$|\boldsymbol{p}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^{\,2}}=2$

$|\boldsymbol{q}|=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$

(ii)　$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=(1)(-2)+(\sqrt{3})(\sqrt{3})=1$

(iii)　$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

(2)　$a=(4,\ 3)$，　$b=(2,\ 1)$，　$p=(-2,\ 0)$，　$q=(6,\ 2)$

(i)　$|p|=\sqrt{4+0}=2$

$|q|=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$

(ii)　$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=-12+0=-12$

(iii)　$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}=\dfrac{-12}{(2)(2\sqrt{3})}=\dfrac{-3\sqrt{10}}{10}$

**問題 2**　$\boldsymbol{a}=(-1,\ 2,\ 4)$，　$\boldsymbol{b}=(2,\ -2,\ 1)$，　$\boldsymbol{c}=(4,\ 1,\ -3)$

(1)　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(-20,\ 30,\ -20)$

(2)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(31,\ -34,\ -26)$

**問題 3**　$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{2x}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

**問題 4**

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x,\ y,\ z)$

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$

(2) $\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}-\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

**問題 5** $\boldsymbol{F}=(2xz)\boldsymbol{i}-(3y^2)\boldsymbol{j}+(yz)\boldsymbol{k}$

$\iiint_0^1-6ydxdydz=-3$

## ● 第 3 章

**問題 1**

(1) $y'=4x^3+3x^2+2x+5$

(2) $y'=4x^3+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{8}{3}x^{-\frac{7}{3}}$

(3) $y'=5x^4-8x^3+3x^2-2x-2$

(4) $y'=-6(3-2x)^2$

(5) $y'=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}$

(6) $y'=\dfrac{2}{(1+x)^2}$

(7) $y'=\dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

(8) $y'=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

**問題 2**

(1) $f'(x)=6x^2-6x+5$　$f'(2)=17,\ f'(-1)=17$

(2) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$　$f'(2)=\dfrac{3}{4},\ f'(-1)=0$

**問題 3**

(1) $y'=-9\cos^2 3x\sin 3x$　(2) $y'=-e^{\cos x}\sin x$

(3) $y'=e^{3x}(3\cos 4x-4\sin 4x)$　(4) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

**問題 4**

(1) 辺々の対数をとって $x$ で微分　　$y' = x^x(\log x + 1)$

(2) $y' = e^{3-x^2}\left(\dfrac{3}{x} - 2x\log x - x\right)$

**問題 5**　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

**問題 6**

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x - 3y^2$

(2) $z = y[\log x + \log y - \log(x+y)]$　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x(x+y)}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \log\dfrac{xy}{x+y} + \dfrac{x}{x+y}$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^2 - \sin y$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x - \cos y$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$,

**問題 7**　$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　　$f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　　$f'(0) = 0$

$f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　　$f''(0) = 1$

したがって

$$f(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + \cdots$$

## ● 第 4 章

**問題 1**

(1) $\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{5}x^3\sqrt{x^2} + x^3 - 5x + c$

(2) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + c$

(3) $\dfrac{1}{a}\log\left|x + \dfrac{b}{a}\right| + c$

(4) $-\dfrac{1}{b}\log\left|\cos x + \dfrac{a}{b}\right| + c$

（5）$x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$

**問題 2**

（1）3

（2）$\dfrac{1}{2}e\,(e^2-1)$

（3）$\dfrac{\pi}{12}$

**問題 3**

（1）$\int_0^1 xe^x=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx=1$

（2）$\int_0^1 x\log x dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2\log x\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{2}x^2\dfrac{1}{x}dx=-\dfrac{1}{4}$

**問題 4**　$9-8x=t$ とおく．

| $x$ | $0\to 1$ |
|---|---|
| $t$ | $9\to 1$ |

$-8x-dx=dt$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{9-8x}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{8}dt\right)=\frac{1}{2}$$

## ● 第 5 章

**問題 1**

（1）線形 2 階同次定数係数偏微分方程式

（2）非線形 2 階非同次変数係数微分方程式

**問題 2**

$$\left(\frac{\pi}{6}{d_p}^3\right)\rho_p\frac{du}{dt}=\left(\frac{\pi}{6}{d_p}^3\right)(\rho_p-\rho)g-C_D\left(\frac{\pi}{4}{d_p}^2\right)\frac{\rho u^2}{2}$$

この左辺は，質量×加速度，右辺の第 1 項は重力マイナス浮力，第 1 項は抗力を示します．この式を整理すると

$$\frac{du}{dt}=\left(\frac{\rho_p-\rho}{\rho_p}\right)g-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{\rho_p}\right)C_D\frac{u}{d_p}$$

となります．この式の左辺を 0 とおいて，$u$ を $u_t$ と置き換えて整理すると

$$u_t = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{(\rho_p - \rho) g}{\rho} \frac{d_p}{C_D}}$$

となります.