第 1 章

演習 1.1

次の式において $f(t)$ を入力，$y(t)$ を出力とする．次の(1)～(3)について，入力と出力の間に線形性が成り立つかどうか,理由とともに答えよ.ただし，a_1，a_{-1}，a，b はいずれも変数 t によらない定数である.

(1) $y(t) = a_1 f(t) + \dfrac{a_{-1}}{f(t)}$

(2) $y(t) = f(t)^3$

(3) $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + a\dfrac{d}{dt}y(t) + b\int y(t)dt = f(t)$

演習 1.2

正弦波 $V_m \sin\omega t$ の全波整流波形 $v(t) = V_m|\sin\omega t|$（図 1.1）をフーリエ級数で展開せよ.

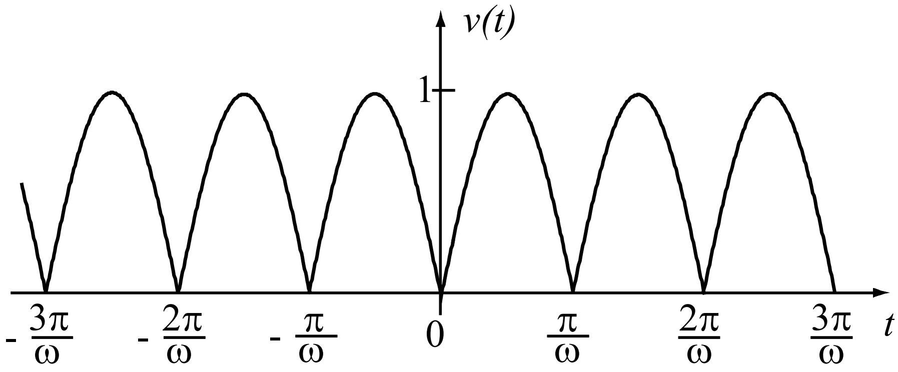


図 1.1　全波整流波形

演習 1.3

フーリエ係数を求める際に,任意の 1 周期にわたる積分で計算した結果は,積分範囲を $-\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2}$ として計算した結果に一致することを示せ.

[解答 1.1]

(1)入力 $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)$ に対する出力は

$$y(t)=a_1\left(\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\right)+\frac{a_{-1}}{\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)}$$

一方， $f_1(t)$ ， $f_2(t)$ に対する出力はそれぞれ $y_1(t)=a_1 f_1(t)+\dfrac{a_{-1}}{f_1(t)}$ ，

$y_2(t)=a_1 f_2(t)+\dfrac{a_{-1}}{f_2(t)}$ であるので，

$$\begin{aligned}
y(t)-\left(\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\right)&=a_1\left(\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\right)+\frac{a_{-1}}{\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)}\\
&\quad-\alpha_1\left(a_1 f_1(t)+\frac{a_{-1}}{f_1(t)}\right)-\alpha_2\left(a_1 f_2(t)+\frac{a_{-1}}{f_2(t)}\right)\\
&=a_{-1}\left(\frac{1}{\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)}-\frac{\alpha_1}{f_1(t)}-\frac{\alpha_2}{f_2(t)}\right)\neq 0
\end{aligned}$$

すなわち，線形ではない．

(2)入力 $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)$ に対する出力は $y(t)=\left(\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\right)^3$

一方， $f_1(t)$， $f_2(t)$ に対する出力はそれぞれ， $y_1(t)=f_1(t)^3$， $y_2(t)=f_2(t)^3$ であるので，

$$\begin{aligned}
&y(t)-\left(\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\right)\\
&=\left(\alpha_1{}^3-\alpha_1\right)f_1(t)^3+\left(\alpha_2{}^3-\alpha_2\right)f_2(t)^3+3\alpha_1{}^2\alpha_2 f_1(t)^2 f_2(t)+3\alpha_1\alpha_2{}^2 f_1(t) f_2(t)^2\\
&=\alpha_1\left(\alpha_1{}^2-1\right)f_1(t)^3+\alpha_2\left(\alpha_2{}^2-1\right)f_2(t)^3+3\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\right)f_1(t) f_2(t)\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

(3)入力 $f_1(t)$， $f_2(t)$ に対する出力はそれぞれ次の式を満足する．

$$\frac{d^2}{dt^2}y_1(t)+a\frac{d}{dt}y_1(t)+b\int y_1(t)dt=f_1(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_2(t)+a\frac{d}{dt}y_2(t)+b\int y_2(t)dt=f_2(t)$$

一方，入力 $\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)$ に対する出力は

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\right)+a\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\right)\\
&\qquad+b\int\left(\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\right)dt=\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)
\end{aligned}$$

と整理され，次の関係式を満足するので，線形性を有する．

$$\alpha_1 \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + \alpha_1 a \frac{d}{dt} y_1(t) + \alpha_1 b \int y_1(t)dt$$
$$+ \alpha_2 \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + \alpha_2 a \frac{d}{dt} y_2(t) + \alpha_2 b \int y_2(t)dt = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$$

[解答 1.2]

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ とすると， $v(t) = V_m |\sin \omega t|$ の周期は $\dfrac{T}{2}$ である．定義に従ってフーリエ係数を求める．

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m \sin \omega t \cos n \frac{4\pi}{T} t dt = \frac{4V_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cos 2n\omega t dt \\
&= \frac{2V_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (\sin(2n+1)\omega t - \sin(2n-1)\omega t) dt \\
&= \frac{2V_m}{T} \left[-\frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)\omega} + \frac{\cos(2n-1)\omega t}{(2n-1)\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2V_m}{T\omega} \left(-\frac{\cos(2n+1)\pi - 1}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)\pi - 1}{2n-1} \right) \\
&= \frac{V_m}{\pi} \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1} \right) = \frac{4V_m}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4V_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \sin 2n\omega t dt \\
&= \frac{2V_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (-\cos(2n+1)\omega t + \cos(2n-1)\omega t) dt \\
&= \frac{2V_m}{T} \left[-\frac{\sin(2n+1)\omega t}{(2n+1)\omega} + \frac{\sin(2n-1)\omega t}{(2n-1)\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{2V_m}{T\omega} \left(-\frac{\sin(2n+1)\pi}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\pi}{2n-1} \right) = 0
\end{aligned}$$

以上の結果をまとめると次式のようにフーリエ展開できる．

$$\begin{aligned}
v(t) = V_m |\sin \omega t| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \\
&= \frac{2V_m}{\pi} + \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 2n\omega t
\end{aligned}$$

[解答 1.3]

$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos m\frac{2\pi}{T}tdt$ において，積分区間を次のように 3 つに分割する.

$$\frac{T}{2}a_n = \int_{t_0}^{-T/2} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt + \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt + \int_{T/2}^{t_0+T} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (1.3.1)$$

ここで， $f(t)$ および $\cos n\frac{2\pi}{T}t$ が周期 T の周期関数であるから次の関係が成り立つ.

$$f(t) = f(t+T)$$

$$\cos\frac{2n\pi}{T}t = \cos\frac{2n\pi}{T}(t+T)$$

この関係を用いると, 式(1.3.1)の第 1 項は次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{-T/2} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt &= \int_{t_0}^{-T/2} f(t+T)\cos\frac{2n\pi}{T}(t+T)dt \\ &= \int_{t_0+T}^{T/2} f(t')\cos\frac{2n\pi}{T}t'dt' = -\int_{T/2}^{t_0+T} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt\end{aligned}$$

これを式(1.3.1)にあてはめると

$$\frac{T}{2}a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt$$

となり,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (1.3.2)$$

が成り立つ. 同様の手順で，次の関係式が成り立つことも示される.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}tdt \qquad (1.3.3)$$

第 2 章　フーリエ級数の性質

演習 2.1

区間 $-\pi \le t \le \pi$ で定義された図 2.1 の時間波形（三角波） $f(t)$ をフーリエ級数で展開せよ．

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}t + 1 & (0 < t \le \pi) \\ \dfrac{1}{\pi}t + 1 & (-\pi \le t \le 0) \end{cases}$$

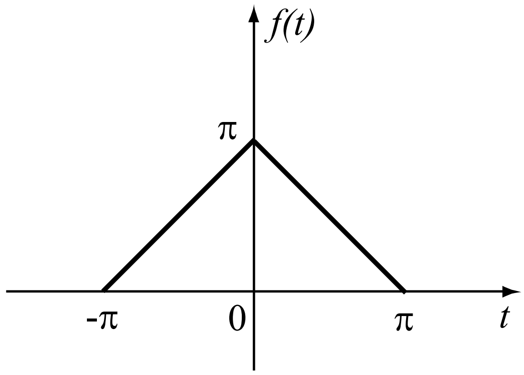


図 2.1　三角波

演習 2.2

区間 $-\pi \le t \le \pi$ で定義された図 2.2 の時間波形（放物曲線の一部） $f(t)$ をフーリエ級数で展開せよ．

$$f(t) = t^2 \quad \left(-\pi \le t \le \pi\right)$$

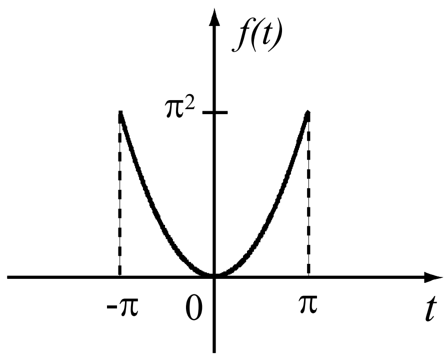


図 2.2　放物曲線

演習 2.3

(1) 1 周期が次の式で定義される周期関数 $f(t)$（図 2.3）をフーリエ級数で展開せよ．

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{a-|t|}{a} & (|t|<a)\\ 0 & (a<|t|<\pi)\end{cases}$$

(2)(1)の結果を利用して次の級数を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\dfrac{an}{2}}{n^2}$$

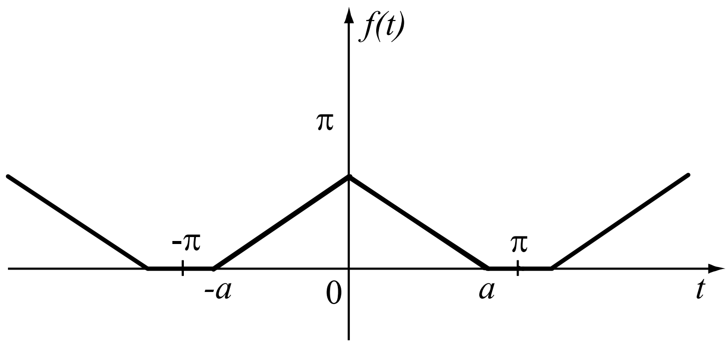


図 2.3

演習 2.4

(1)区間 $-\pi\le t\le\pi$ で定義された次の関数 $f(t)$ をフーリエ級数で展開せよ．ただし，a は非整数とする．

$$f(t)=\cos at$$

(2)(1)の結果を利用して，次の公式を示せ．

$$\frac{x}{\sin x}=1+2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-(n\pi)^2}$$

[解答 2.1]

区間 $-\pi \le t \le \pi$ を 1 周期とみなしてフーリエ級数で展開する．周期 $T = 2\pi$ であり，$f(t)$ は偶関数であるから，フーリエ係数は次のように求まる．

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}t\right)\cos ntdt$$

(i) $n = 0$ に対して

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\left[t-\frac{1}{2\pi}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(ii) $n \ne 0$ に対して

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{\pi}t\right)\sin nt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{\pi}\right)\sin ntdt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin ntdt\right) \\ &= \frac{2}{n\pi^2}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right) \end{aligned}$$

[解答 2.2]

周期 $T = 2\pi$ として，フーリエ係数 a_n，b_n を計算する．関数 $f(t)$ が t に関して偶関数であるので $b_n = 0$ であり，a_n は次の式で求まる．

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos n\frac{2\pi}{2\pi}tdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos ntdt$$

$n = 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$n \ne 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[t^2\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\frac{\sin nt}{n}dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-2t\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\frac{\cos nt}{n^2}dt$$

$$= \frac{4\cos n\pi}{n^2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

となる．したがって，与えられた波形は次のようにフーリエ級数に展開される．

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{9}\cos 3t + \cdots\right)$$

［解答 2.3］

周期 $T = 2\pi$ として，フーリエ係数を計算する．関数 $f(t)$ が t に関して偶関数であるので $b_n = 0$ であり，a_n は次の式で求まる．

$$a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^a \frac{a-t}{a}\cos n\frac{2\pi}{2\pi}tdt = \frac{2}{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{t}{a}\right)\cos ntdt$$

$n = 0$ のとき

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a\left(1-\frac{t}{a}\right)dt = \frac{2}{\pi}\left[t - \frac{t^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{\pi}$$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{t}{a}\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^a + \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\sin nt}{an}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{an^2}\right]_0^a = \frac{2}{a\pi n^2}(1-\cos an) = \frac{4\sin^2\frac{an}{2}}{a\pi n^2}$$

となる．したがって，$f(t)$ は次のようにフーリエ級数展開される．

$$f(t) = \frac{a}{2\pi} + \frac{4}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{an}{2}}{n^2}\cos nt$$

(2) $t = 0$ における $f(t)$ の値を考える．$f(0) = 1$ であるから，(1)の結果のフーリエ級数において $t = 0$ とすると，次の式を得る．

$$f(0)=\frac{a}{2\pi}+\frac{4}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{an}{2}}{n^2}=1$$

この結果から，問題の級数は次のように求まる．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{an}{2}}{n^2}=\frac{a(2\pi-a)}{8}$$

［解答 2.4］

(1) $f(t)$は偶関数であるから$b_n=0$であり． $f(t)$を周期2πの周期関数とみなせばa_nは次の式で求められる．

$$f(t)=\cos at$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos at\cos nt dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(n+a)t+\cos(n-a)t\right)dt$$

$n\neq a$のとき

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(n+a)t}{n+a}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\sin(n-a)t}{n+a}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+a)\pi}{n+a}+\frac{\sin(n-a)\pi}{n-a}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi\sin a\pi}{n+a}-\frac{\cos n\pi\sin a\pi}{n-a}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}$$

したがって， $f(t)$は次のようにフーリエ級数に展開される．

$$f(t)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nt$$

(2)(1)の結果を$t=0$で考えると， $f(0)=1$， $\cos nt=1$であるから

$$1=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$$

となる． さらに$x=a\pi$とおくと

$$1=\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin x}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-\left(\dfrac{n}{a}\right)^2}=\frac{\sin x}{x}+2x\sin x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-(n\pi)^2}$$

したがって， $\dfrac{x}{\sin x}=1+2x^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-(n\pi)^2}$

第 3 章　複素フーリエ級数

演習 3.1　関数 $f(t)$ が実数値をとる場合，$f(t)$ を三角関数で展開したフーリエ係数を a_n，b_n とする．このとき，$f(t)$ の複素フーリエ係数 $c_n = |c_n| e^{j\theta_n}$ の絶対値 $|c_n|$ と偏角 θ_n を，a_n と b_n を用いて表せ．

演習 3.2　関数 $f(t)$ が実数値をとる場合，$f(t)$ は次のように展開表現できることを示せ．ただし，$f(t)$ の複素フーリエ係数を $c_n = |c_n| e^{j\theta_n}$ とする．

$$f(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \theta_n)$$

演習 3.3　関数 $f(t)$ が実数値をとる場合，次のことを証明せよ．

(1) $f(t)$ が偶関数であるとき，その複素フーリエ係数は実数になる．

(2) $f(t)$ が奇関数であるとき，その複素フーリエ係数は純虚数になる．

演習 3.4　次の問に答えよ．

(1)次の関数 $f(t)$ を $-\pi \le t \le \pi$ の範囲で複素フーリエ級数で展開せよ．

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi \le t \le \pi)$$

(2) (1)の結果を用いて次の級数を導け．

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

演習 3.5

(1)図 3.1 に示す矩形パルス列 $f(t)$ の複素フーリエ級数を求めよ．

(2)パルスの振幅を $E = \dfrac{1}{2a}$ としてパルスの幅 $2a$ を限りなく狭くした場合（$2a \to 0$），(1)で求めたフーリエ級数はどうなるか示せ．

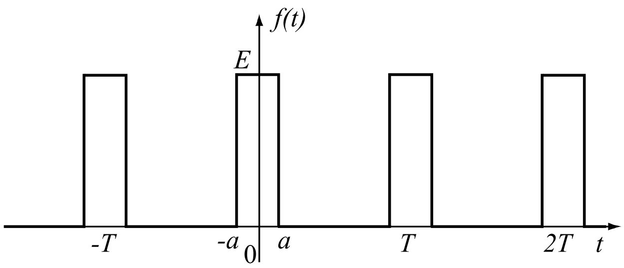


図 3.1　矩形パルス列

演習 3.6

(1)図 3.2 に示す $f(t)$（正負繰り返し矩形パルス列）の複素フーリエ級数を求めよ.

(2)パルスの振幅を $E=\dfrac{1}{2a}$ としてパルスの幅 $2a$ を限りなく狭くした場合（$2a \to 0$），(1)で求めたフーリエ級数はどうなるか示せ.

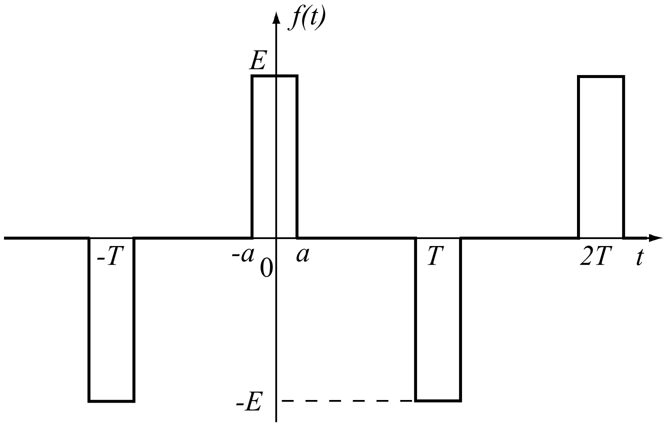


図 3.2　正負繰り返し矩形パルス列

［解答 3.1］

関数 $f(t)$ が実数値をとる場合 a_n， b_n は全て実数となり， $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ であるから，絶対値 $|c_n| = \dfrac{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}}{2}$， 偏角 $\theta_n = \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ となる．

［解答 3.2］

関数 $f(t)$ が実数値をとる場合，a_n，b_n は全て実数となり，$c_n{*} = \dfrac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n}$ であるから，複素フーリエ級数は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \exp\left(j\frac{2n\pi}{T}t\right) + \left(c_n \exp\left(j\frac{2n\pi}{T}t\right)\right)^{*}\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[c_n \exp\left(j\frac{2n\pi}{T}t\right)\right] \\
&= c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t + \theta_n\right)
\end{aligned}
$$

［解答 3.3］

関数 $f(t)$ が実数値をとる場合，a_n，b_n は全て実数となる．また $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ であるから，次のことがいえる．

(1)周期関数が偶関数であるとき $b_n = 0$ であるから， c_n は実数 $\dfrac{a_n}{2}$ になる．

(2)周期関数が奇関数であるとき $a_n = 0$ であるから，c_n は純虚数 $-j\dfrac{b_n}{2}$ になる．

［解答 3.4］

(1) 関数 $f(t)$ を周期 $T = 2\pi$ の周期関数とみなして，

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jnt}$$

と複素フーリエ級数展開すると，フーリエ係数は次のように定まる．

$n=0$に対しては，$c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\dfrac{2}{2\pi}\int_{o}^{\pi}t^2dt=\dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}=\dfrac{\pi^2}{3}$となる．

$n\neq 0$の場合，

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-jnt}dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{t^2}{-jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{jn}\int_{-\pi}^{\pi}te^{-jnt}dt\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{-jn}\left(e^{-jn\pi}-e^{jn\pi}\right)+\frac{2}{jn}\left(\left[\frac{t}{-jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{jn}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jnt}dt\right)\right\}\\
&=\frac{1}{jn\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{-jn}e^{-jn\pi}-\frac{\pi}{jn}e^{jn\pi}\right)+\frac{1}{n^2}\left[e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}\\
&=\frac{1}{jn\pi}\left\{-\frac{2\pi}{jn}e^{jn\pi}+\frac{1}{n^2}\left(e^{-jn\pi}-e^{jn\pi}\right)\right\}=\frac{2}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{jnt}+\frac{2}{(-n)^2}(-1)^{-n}e^{-jnt}=\frac{2}{n^2}(-1)^n\left(e^{jnt}+e^{-jnt}\right)=\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nt$$

となるから，

$$f(t)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

(2) 前問の結果において$t=0$における関数の値と級数展開の値を考える．左辺は，$f(t)=t^2$より$f(0)=0$である．また，右辺において$t=0$のとき$\cos nt=1$であるから，次の関係式が成り立つ．

$$0=\frac{\pi^2}{3}-\frac{4}{1^2}+\frac{4}{2^2}-\frac{4}{3^2}+\frac{4}{4^2}-\cdots$$

すなわち，$\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$ となる．

［解答 3.5］

(1) 振幅 E，幅 $2a$ の正のパルスが周期 T で繰り返されているので，$f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n は次の式から求められる．

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-a}^{a} Ee^{-j\frac{2n\pi}{T}t}dt$$

$n=0$ に対して

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-a}^{a} Edt = \frac{2aE}{T}$$

$n \neq 0$ に対して

$$c_n = \frac{E}{T}\left[\frac{jT}{2n\pi}e^{-j\frac{2n\pi}{T}t}\right]_{-a}^{a} = \frac{jE}{2n\pi}\left(e^{-j\frac{2n\pi}{T}a} - e^{j\frac{2n\pi}{T}a}\right) = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{2an\pi}{T}$$

したがって，パルス列 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数に展開される．

$$f(t) = \frac{2aE}{T} + \frac{E}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{2an\pi}{T}}{n} e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

(2) パルスの振幅を $E = \dfrac{1}{2a}$ とすると，(1)で求めたフーリエ級数は次のように整理される．

$$f(t) = \frac{1}{T} + \frac{1}{2a\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{2an\pi}{T}}{n} e^{j\frac{2n\pi}{T}t} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{2an\pi}{T}}{\dfrac{2an\pi}{T}} e^{j\frac{2n\pi}{T}t}$$

ここで，$2a \to 0$ とすると $\dfrac{\sin\dfrac{2an\pi}{T}}{\dfrac{2an\pi}{T}} \to 1$ であるから，フーリエ級数は次のようになる．

$$f(t) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{j\frac{2n\pi}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2n\pi}{T}t} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\cos\frac{2n\pi}{T}t$$

［解答 3.6］

(1) パルス列の周期は $2T$ であるので，$f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n は次の式から求められる．

$$c_n = \frac{1}{2T}\int_{-a}^{a} E e^{-j\frac{2n\pi}{2T}t}dt - \frac{1}{2T}\int_{T-a}^{T+a} E e^{-j\frac{2n\pi}{2T}t}dt$$

$n = 0$ に対して

$$c_0 = \frac{1}{2T}\int_{-a}^{a} E dt - \frac{1}{2T}\int_{T-a}^{T+a} E dt = 0$$

$n \neq 0$ に対して

$$c_n = \frac{E}{2T}\left(\left[\frac{e^{-j\frac{n\pi}{T}t}}{-j\frac{n\pi}{T}}\right]_{-a}^{a} - \left[\frac{e^{-j\frac{n\pi}{T}t}}{-j\frac{n\pi}{T}}\right]_{T-a}^{T+a}\right)$$

$$= \frac{E}{-j2n\pi}\left\{e^{-j\frac{n\pi}{T}a} - e^{j\frac{n\pi}{T}a} - \left(e^{-j\frac{n\pi}{T}(T+a)} - e^{-j\frac{n\pi}{T}(T-a)}\right)\right\}$$

$$= \frac{E}{-j2n\pi}\left(e^{-j\frac{n\pi}{T}a} - e^{j\frac{n\pi}{T}a}\right)\left(1 - e^{-jn\pi}\right) = \frac{E\sin\frac{an\pi}{T}}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

したがって，パルス列 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数に展開される．

$$f(t) = \frac{E}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\frac{an\pi}{T}}{n}\left(1-(-1)^n\right)e^{j\frac{n\pi}{T}t}$$

(2) パルスの振幅を $E = \frac{1}{2a}$ とすると，(1)で求めたフーリエ級数は次のように整理される．

$$f(t) = \frac{1}{2a\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\frac{an\pi}{T}}{n}\left(1-(-1)^n\right)e^{j\frac{n\pi}{T}t} = \frac{1}{2T}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin\frac{an\pi}{T}}{\frac{an\pi}{T}}\left(1-(-1)^n\right)e^{j\frac{n\pi}{T}t}$$

ここで，$2a \to 0$ とすると $\dfrac{\sin\frac{an\pi}{T}}{\frac{an\pi}{T}} \to 1$ であるから，フーリエ級数は次のようになる．

$$f(t) = \frac{1}{2T}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)e^{j\frac{n\pi}{T}t} = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{n\pi}{T}t = \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{(2m-1)\pi}{T}t$$

第 4 章　フーリエ変換の基礎

演習 4.1　次の問に答えよ.

(1) 図 4.1 に示す次の単一矩形パルス $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

$$f(t)=\begin{cases} E & (|t|\le a) \\ 0 & (|t|>a) \end{cases}$$

(2) $F(\omega)$ の概形を示し，特徴的な点について述べよ.

(3) (1)で得られた $F(\omega)$ の逆変換を用いて次の関係式を導け.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega=\begin{cases} \pi & (|t|<a) \\ \dfrac{\pi}{2} & (|t|=a) \\ 0 & (|t|>a) \end{cases}$$

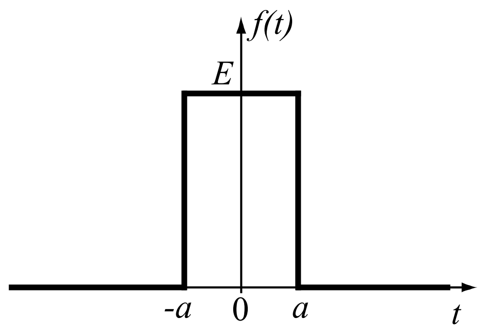


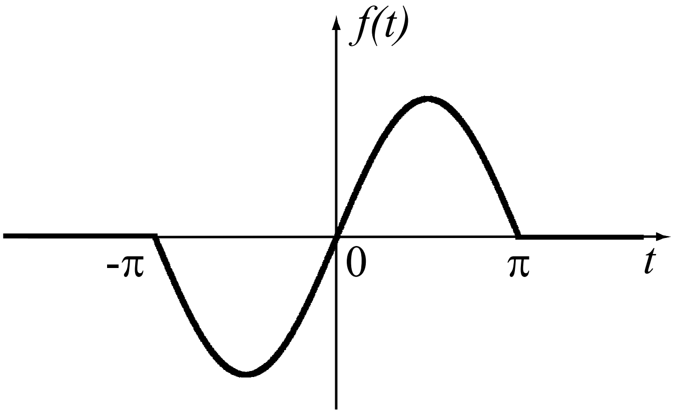
図 4.1　単一矩形パルス

演習 4.2　次の関数（図 4.2(a),(b),(c)）のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

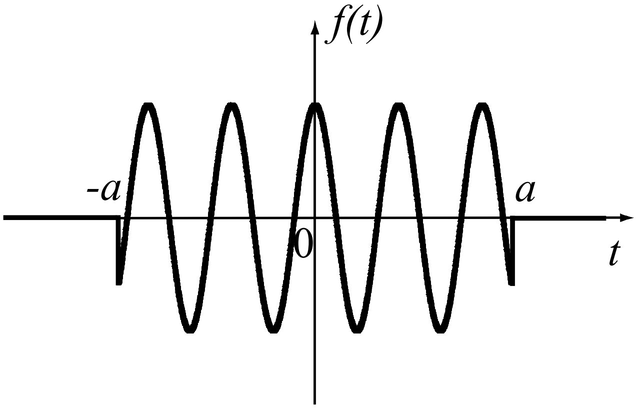
(1) $f(t)=\begin{cases} \sin t & (|t|\le\pi) \\ 0 & (|t|>\pi) \end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases} \cos\omega_0 t & (|t|\le a) \\ 0 & (|t|>a) \end{cases}$

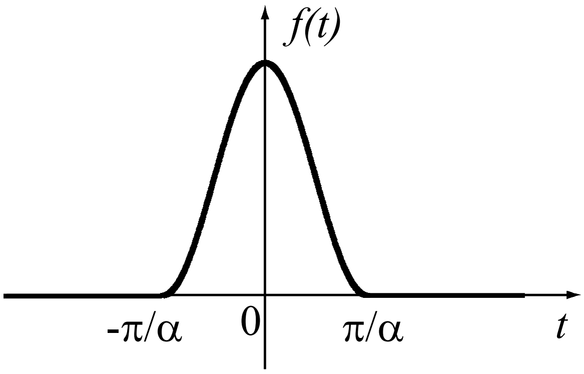
(3) $f(t)=\begin{cases} 1+\cos\alpha t & \left(|t|\le\dfrac{\pi}{\alpha}\right) \\ 0 & \left(|t|>\dfrac{\pi}{\alpha}\right) \end{cases}$　ただし，$\alpha>0$ とする.



(a)正弦関数の一周期分



(b)余弦関数の一部



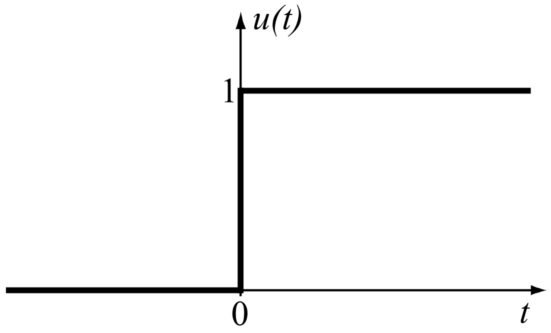
(c)関数$1+\cos\alpha t$の一周期分

図 4.2　演習 4.2 の図

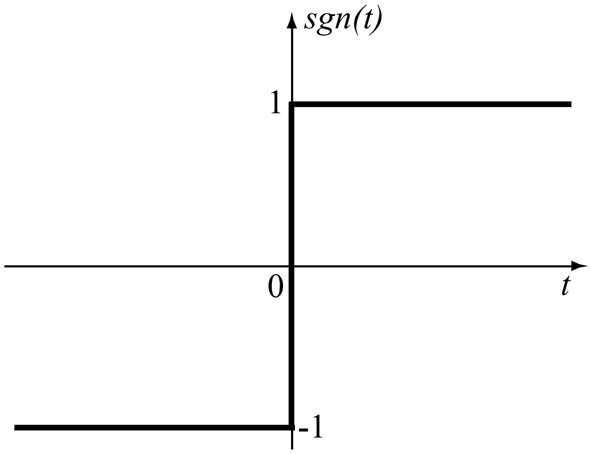
演習 4.3　次の関数のフーリエ変換を求めよ.

(1)階段関数（図 4.3(a)）$u(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$

(2)符号関数（図 4.3(a)）$\mathrm{sgn}(t)=\dfrac{t}{|t|}=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$



(a)階段関数



(b)符号関数

図 4.3　演習 4.3 の図

演習 4.4　関数 $\mathrm{sgn}(t) = \dfrac{t}{|t|}$ のフーリエ変換は $F(\omega) = \dfrac{2}{j\omega}$ である．$F(\omega)$ をフーリエ逆変換して結果が $\mathrm{sgn}(t) = \dfrac{t}{|t|}$ になることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ である．

演習 4.5　次の関数（2 乗余弦波）

$$f(t) = \begin{cases} 2\cos^2 \dfrac{\pi}{a} t & (|t| < \dfrac{a}{2}) \\ 0 & (|t| > \dfrac{a}{2}) \end{cases}$$

のフーリエ変換が，次式で与えられることを示せ．

$$F(\omega) = a \sin \frac{a\omega}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{a\omega}{2}} + \frac{\frac{a\omega}{2}}{\pi^2 - \left(\frac{a\omega}{2}\right)^2} \right\}$$

［解答 4.1］

(1) 定義にしたがって，フーリエ変換する．

$$F(\omega)=\int_{-a}^{a}Ee^{-j\omega t}dt=E\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-a}^{a}=E\frac{e^{j\omega a}-e^{-j\omega a}}{j\omega}=2E\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

(2) $F(\omega)$を次のように変形する．

$$F(\omega)=2aE\frac{\sin a\omega}{a\omega}$$

この式から，$F(\omega)$の概形は図 A4.1 のようになる．

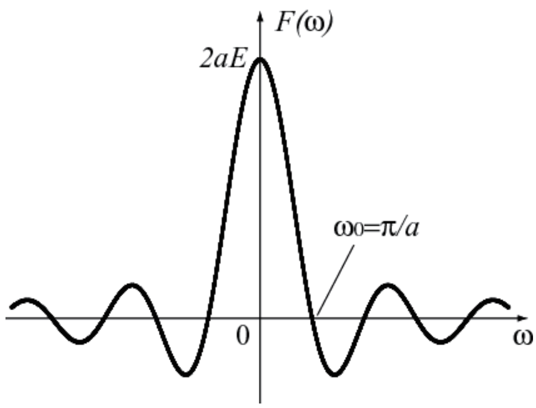


図 A4.1　単一矩形パルスのフーリエ変換$F(\omega)$

$F(\omega)$の特徴的な点は，次のとおり．

・$\omega\to 0$の極限で$\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\to 1$であるから$F(\omega)\to 2aE$

・$\omega=\dfrac{n\pi}{a}$　$(n=1,2,3\cdots)$で$F(\omega)$は 0 になる．

・$F(\omega)$の最初の零点は$\omega_0=\dfrac{\pi}{a}$である．ω_0は周波数スペクトルの広がりの目安となる．aが小さい方が，ω_0は大きくなる．すなわち，パルス幅$2a$が狭い方が，周波数スペクトルの広がりが大きくなる．

(3) 不連続点の扱いに注意して，フーリエ逆変換する．

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2E\frac{\sin a\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega\\&=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega=\begin{cases}E & (|t|<a)\\ \dfrac{E}{2} & (|t|=a)\\ 0 & (|t|>a)\end{cases}\end{aligned}$$

したがって，次のように定まる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t d\omega=\begin{cases}\pi & (|t|<a)\\ \dfrac{\pi}{2} & (|t|=a)\\ 0 & (|t|>a)\end{cases}$$

［解答 4-2］

(1) 定義に従ってフーリエ変換を求める．

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin te^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2j}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{j(1-\omega)t}-e^{-j(1+\omega)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{j(1-\omega)t}}{j(1-\omega)}-\frac{e^{-j(1+\omega)t})}{-j(1+\omega)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{e^{j(1-\omega)\pi}-e^{-j(1-\omega)\pi}}{j(1-\omega)}-\frac{e^{-j(1+\omega)\pi}-e^{j(1+\omega)\pi}}{-j(1+\omega)}\right)$$

$$=\frac{\sin(1-\omega)\pi}{j(1-\omega)}-\frac{\sin(1+\omega)\pi}{j(1+\omega)}=\frac{(1+\omega)\sin(1-\omega)\pi-(1-\omega)\sin(1+\omega)\pi}{j(1-\omega^2)}$$

$$=\frac{-(1+\omega)\cos\pi\sin\omega\pi-(1-\omega)\cos\pi\sin\omega\pi}{j(1-\omega^2)}$$

$$=\frac{(1+\omega)\sin\omega\pi+(1-\omega)\sin\omega\pi}{j(1-\omega^2)}=j\frac{2\sin\omega\pi}{\omega^2-1}$$

(2) 幅$2a$の矩形パルスを次の関数$p_a(t)$で表すことにする．

$$p_a(t)=\begin{cases}1 & (|t|\le a)\\ 0 & (|t|>a)\end{cases}$$

$f(t)=p_a(t)\cos\omega_0 t=\dfrac{p_a(t)e^{j\omega_0 t}+p_a(t)e^{-j\omega_0 t}}{2}$であり，フーリエ変換の性質を用いると，

$\mathcal{F}\left[e^{\pm j\omega_0 t}p_a(t)\right]=P_a(\omega\mp\omega_0)$である．ここで，$P_a(\omega)$は幅$2a$の矩形パルス$p_a(t)$のフーリエ変換$P_a(\omega)=\int_{-a}^{a}e^{-j\omega t}dt=2\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$であるから，問題の関数のフーリエ変換は次のように求まる．

$$F(\omega)=\frac{\sin a(\omega-\omega_0)}{\omega-\omega_0}+\frac{\sin a(\omega+\omega_0)}{\omega+\omega_0}$$

(3)

$$F(\omega)=\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}(1+\cos\alpha t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}\left(1+\frac{e^{j\alpha t}+e^{-j\alpha t})}{2}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(\alpha-\omega)t}}{j(\alpha-\omega)}+\frac{e^{-j(\alpha+\omega)t}}{-j(\alpha+\omega)}\right]_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}$$

$$=\frac{e^{-j\omega\pi/\alpha}-e^{j\omega\pi/\alpha}}{-j\omega}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\exp\left(j\left(\pi-\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)\right)-\exp\left(-j\left(\pi-\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)\right)}{j(\alpha-\omega)}+\frac{\exp\left(-j\left(\pi+\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)\right)-\exp\left(j\left(\pi+\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)\right)}{-j(\alpha+\omega)}\right)$$

$$=\frac{2\sin\omega\pi/\alpha}{\omega}+\frac{\sin\left(\pi-\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)}{\alpha-\omega}+\frac{\sin\left(\pi+\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)}{\alpha+\omega}$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)}{\omega}+\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)}{\alpha-\omega}-\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)}{\alpha+\omega}=2\left(\frac{1}{\omega}+\frac{\omega}{\alpha^2-\omega^2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{\alpha}\pi\right)$$

［解答 4.3］

(1) 階段関数の微分$u'(t)$は，デルタ関数$\delta(t)$に等しい．すなわち，$u'(t)=\delta(t)$であるから，この両辺をフーリエ変換して次の関係を得る．

$$j\omega U(\omega)=1$$

ただし，階段関数$u(t)$のフーリエ変換を$U(\omega)$とする．

ここで，$\omega\delta(\omega)=0$であるから

$$j\omega U(\omega)=1+C\omega\delta(\omega)$$

としてもよい．$t=0$を除いて

$$u(t)+u(-t)=1$$

であるから，両辺をフーリエ変換して$U(\omega)+U(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$

$$\left(\frac{1}{j\omega}+\frac{C}{j}\delta(\omega)\right)+\left(-\frac{1}{j\omega}+\frac{C}{j}\delta(-\omega)\right)=2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{2C}{j}\delta(\omega)=2\pi\delta(\omega)$$

すなわち，$C=j\pi$と求まる．

したがって，階段関数のフーリエ変換は次のように求まる．

$$U(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

(2) $\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$であるから，$U(\omega)=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$を用いて符号関数のフーリエ変換は次のように求まる．

$$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]=2\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

［解答 4.4］

$F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$ のフーリエ逆変換は次の式で計算できる．

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t+j\sin\omega t}{j\omega}d\omega$$

$\dfrac{\cos\omega t}{j\omega}$ は ω の奇関数であるから，$-\infty<\omega<\infty$ にわたる積分は 0 になる．

$t>0$ のとき，フーリエ逆変換は次のように計算される．

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega t}d\omega t=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1$$

また，$t<0$ のとき $x=\omega t<0$ となるので，変数変換の際の符号の変化に注意すると，フーリエ逆変換は次のように計算される．

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega t}d\omega t=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{-\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(-x)}{-x}(-dx)=-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=-1$$

以上のことから，$F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$ のフーリエ逆変換は $\mathrm{sgn}(t)=\dfrac{t}{|t|}$ になる．

［解答 4.5］

フーリエ変換の定義に従って計算する．

$$F(\omega)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}2\cos^2\frac{\pi}{a}te^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(1+\cos\frac{2\pi}{a}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(1+\frac{e^{j\frac{2\pi}{a}t}+e^{-j\frac{2\pi}{a}t}}{2}\right)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-j\omega t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)t}dt$$

$$=\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)t}}{j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)t}}{-j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{e^{j\frac{a\omega}{2}}-e^{-j\frac{a\omega}{2}}}{j\omega}+\frac{1}{2}\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)\frac{a}{2}}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)\frac{a}{2}}}{j\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)}+\frac{1}{2}\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)\frac{a}{2}}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)\frac{a}{2}}}{j\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a\omega}{2}}{\omega}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)\frac{a}{2}}{\frac{2\pi}{a}-\omega}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)\frac{a}{2}}{\frac{2\pi}{a}+\omega}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a\omega}{2}}{\omega}+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2-\omega^2}\left\{\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)\sin\left(\pi-\frac{a\omega}{2}\right)+\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)\sin\left(\pi+\frac{a\omega}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a\omega}{2}}{\omega}+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2-\omega^2}\left\{\left(\frac{2\pi}{a}+\omega\right)\sin\frac{a\omega}{2}-\left(\frac{2\pi}{a}-\omega\right)\sin\frac{a\omega}{2}\right\}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a\omega}{2}}{\omega}+\frac{\frac{a^2\omega}{2}\sin\frac{a\omega}{2}}{\pi^2-\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2}=a\sin\frac{a\omega}{2}\left\{\frac{1}{\frac{a\omega}{2}}+\frac{\frac{a\omega}{2}}{\pi^2-\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2}\right\}$$

第5章　フーリエ変換の性質

演習 5.1　関数$f(t)$のフーリエ変換を$F(\omega)$とするとき，次の関数$g(t)$のフーリエ変換$G(\omega)$を求めよ．

(1) $g(t)=f(t)\sin\omega_0 t$

(2) $g(t)=f(t)+\dfrac{f(t-a)+f(t+a)}{2}$

演習 5.2　次の問に答えよ．

(1) 次のガウス関数で表される単一パルス（単一ガウスパルス）のフーリエ変換$F(\omega)$を求めよ．

$$f(t)=E\exp\left(-\left(\frac{2t}{\tau}\right)^2\right)$$

ただし，次の数学公式を用いてよい．

$$\int_0^\infty \exp(-a^2t^2)\cos bt\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

(2) (1)で得られた$F(\omega)$をωの関数として図示せよ．また，単一ガウスパルスの時間波形$f(t)$とそのフーリエ変換$F(\omega)$の関係について，特徴的な点を述べよ．

演習 5.3　デルタ関数$\delta(t)$のフーリエ変換は$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$で与えられる．これに対するフーリエ逆変換を用いて，次の式が成り立つことを示せ．

$$\delta(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha t}{\pi t}$$

演習 5.4　次の関数のフーリエ変換を求めよ．

$$f(t)=\frac{\sin a\pi t}{a\pi t}$$

演習 5.5 次の関数$f_1(t)$，$f_2(t)$に対して，畳み込み関数$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$を求めよ．ただし，$a>0$とする．

$$f_1(t)=f_2(t)=\begin{cases}e^{-at} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

さらに，$f(t)$のフーリエ変換を求め，その結果が$f_1(t)$，$f_2(t)$のフーリエ変換$F_1(\omega)$，

$F_2(\omega)$ の積に一致することを確かめよ．

演習 5.6　単一矩形パルス

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<W)\\ 0 & (t<0, W<t)\end{cases}$$

の自己相関関数 $R_{ff}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)f(t)^* dt$ を求め，結果を図で示せ．

演習 5.7　自己相関関数 $R_{ff}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)f(t)^* dt$ について，次の関係が成り立つことを示せ．

$$R_{ff}(0)\geq \mathrm{Re}\left[R_{ff}(\tau)\right]$$

演習 5.8　次の関数 $f(t)$ とそのフーリエ変換について，パーセバルの等式が成り立つことを示せ．

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

演習 5.9　次の問に答えよ．

(1) $f(t)=\exp\left(-|t|\right)$ のフーリエ変換を求めよ

(2) (1)の結果とパーセバルの等式を用いて $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega$ を求めよ．

演習 5.10　次の問に答えよ．

(1) $f(t)=\mathrm{sgn}(t)\exp\left(-|t|\right)$ のフーリエ変換を求めよ．ただし，$\mathrm{sgn}(t)$ は次の符号関数を表す．

$$\mathrm{sgn}(t)=\frac{t}{|t|}=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$

(2) (1)の結果とパーセバルの等式を用いて $\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega$ を求めよ．

［解答 5.1］

(1) $\sin\omega_0 t = \dfrac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$なので $g(t) = \dfrac{f(t)}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$ と表わせる．

ここで，フーリエ変換の性質 $\mathcal{F}\left[e^{jat} f(t)\right] = F(\omega - a)$を用いると，$g(t)$ のフーリエ変換 $G(\omega)$ は次のように求まる．

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{f(t)}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)\right] = \frac{1}{2j}\left(F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)\right)$$

(2) フーリエ変換の性質 $\mathcal{F}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-j\omega\tau}\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ を用いると，$\mathcal{F}\left[f(t \pm a)\right] = e^{\pm j\omega a} F(\omega)$ であるから，$G(\omega)$ は次のように求まる．

$$G(\omega) = F(\omega)\left(1 + \frac{e^{-ja\omega} + e^{ja\omega}}{2}\right) = F(\omega)(1 + \cos a\omega)$$

［解答 5.2］

(1) $\exp\left(-\left(\dfrac{2t}{\tau}\right)^2\right)$ は t について偶関数であるから，フーリエ変換は次のように変形できる．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E \exp\left(-\left(\frac{2t}{\tau}\right)^2\right)\exp(-j\omega t)dt$$

$$= 2E\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{2t}{\tau}\right)^2\right)\cos\omega t dt$$

ここで，$a = \dfrac{2}{\tau}$，$b = \omega$ とおいて積分公式を用いれば次のようにフーリエ変換が求まる．

$$F(\omega) = \frac{E\tau\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\left(\frac{\tau\omega}{4}\right)^2\right)$$

(2) 単一ガウスパルス $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は，図 A5.1 に示すように ω のガウス関数になる．

$f(t)$ と $F(\omega)$ の関係で特徴的な点は，次のとおり．

・$t_0 = \dfrac{\tau}{2}$ で $f(t)$ は $f(0)$ の e^{-1} となる．一方，$F(\omega)$ は $\omega_0 = \dfrac{4}{\tau}$ で $F(0)$ の e^{-1} となる．

t_0 と ω_0 は，それぞれ時間領域での広がりと周波数スペクトルの広がりの目安とみなすことができる．τ が大きい方がパルスの時間的な広がり t_0 が大きくなるが，周波数スペクトルの広がり ω_0 は小さくなる．

・パルスの時間的な広がり t_0 と周波数スペクトルの広がり ω_0 の積は $t_0\omega_0 = 2$ で一定である．

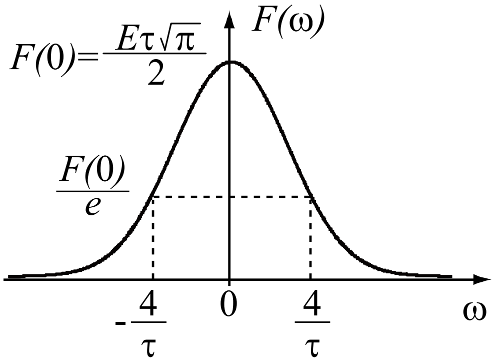


図 A5.1　単一ガウスパルスのフーリエ変換 $F(\omega)$

［解答 5.3］

$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ のフーリエ逆変換から，デルタ関数 $\delta(t)$ は次のように表わされる．

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{jt\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{e^{jt\omega}}{jt}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2j\sin\alpha t}{jt} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha t}{\pi t}$$

［解答 5.4］

幅 $2a$，振幅 1 の単一矩形パルスのフーリエ変換は $2a\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}$ である。これを用いると，幅 $2a\pi$，振幅 $\dfrac{1}{2a\pi}$ の単一矩形パルス $g(t)$ のフーリエ変換は $G(\omega) = \dfrac{\sin a\pi\omega}{a\pi\omega}$ となる．フーリエ変換の対称性を用いると $G(t)$ のフーリエ変換は $2\pi g(-\omega)$ であるから，$f(t)\ (= G(t))$ のフーリエ変換は次のように求まる．

$$2\pi g(-\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & (|\omega| \le a\pi) \\ 0 & (|\omega| > a\pi) \end{cases}$$

［解答 5.5］

$\tau < 0$ において $f_1(\tau) = 0$ であるから，畳み込み関数は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} f_2(t-\tau) d\tau$$

で計算される．さらに，$t < \tau$ において $f_2(t-\tau) = 0$ であるから，畳み込み関数 $f(t)$ は，次のように求まる．

(i) $t>0$ のとき

$$f(t)=\int_0^t e^{-a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau=\int_0^t e^{-at}d\tau=te^{-at}$$

(ii) $t<0$ のとき

$$f(t)=0$$

次に，$f(t)$ のフーリエ変換を求める．

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}te^{-at}e^{-j\omega t}dt\\&=\left[\frac{te^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{a+j\omega}\int_0^{\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt\\&=\frac{1}{a+j\omega}\left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{(a+j\omega)^2}\end{aligned}$$

一方，$F_1(\omega)=F_2(\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$ であるから，$F(\omega)=F_1(\omega)F_2(\omega)$ が成り立つ．すなわち，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ の畳み込み関数 $f(t)$ のフーリエ変換は，$f_1(t)$，$f_2(t)$ のフーリエ変換 $F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$ の積に一致する．

［解答 5.6］

自己相関関数 $R_{ff}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau+t)f(t)^{*}dt$ は次のようにして求まる．ただし，$f(t)$ は実数値のみをとるので $f(t)^{*}=f(t)$ としてよい．

(i) $\tau<-W$ の場合，$f(\tau+t)$ と $f(t)$ の重なりはないので $R_{ff}(\tau)=0$

(ii) $-W\le\tau<0$ の場合，$f(\tau+t)$ と $f(t)$ は $-\tau<t<W$ で重なるので

$$R_{ff}(\tau)=\int_{-\tau}^{W}dt=W+\tau$$

(iii) $0\le\tau<W$ の場合，$f(\tau+t)$ と $f(t)$ は $0<t<W-\tau$ で重なるので

$$R_{ff}(\tau)=\int_0^{W-\tau}dt=W-\tau$$

(iv) $W\le\tau$ の場合，$f(\tau+t)$ と $f(t)$ の重なりは無いので $R_{ff}(\tau)=0$

自己相関関数 $R_{ff}(\tau)$ は，図 A5.2 のようになる．

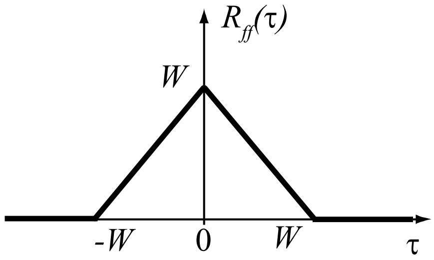


図 A5.2　単一矩形パルスの自己相関関数

［解答 5.7］

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(\tau+t) - f(t) \right|^2 dt \geq 0$$

より，次の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t) f(\tau+t)^* dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t)^* dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t) f(t)^* dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)^* f(t) dt$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t) f(\tau+t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t)^* dt = R_{ff}(0)$$

であり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t) f(t)^* dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)^* f(t) dt = 2\,\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t) f(t)^* dt \right] = 2\,\mathrm{Re}\left[R_{ff}(\tau) \right]$$

であるから，次の関係が成り立つ.

$$R_{ff}(0) \geq \mathrm{Re}\left[R_{ff}(\tau) \right]$$

［解答 5.8］

関数 $f(t)$ のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{a+j\omega} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2} d\omega$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 + a^2 \tan^2\theta} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a} = \frac{\pi}{a}$$

一方，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt=\int_0^{\infty}e^{-2at}dt=\left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

したがって，パーセバルの等式 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|^2 dt$ が成り立つ.

［解答 5.9］

(1) $f(t)=\exp(-|t|)$ のフーリエ変換は次のように求まる.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-|t|)e^{-j\omega t}dt&=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-j\omega)t}dt+\int_0^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt\\&=\left[\frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-1-j\omega}\right]_0^{\infty}\\&=\frac{1}{1-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}\end{aligned}$$

(2) (1)の結果をパーセバルの等式にあてはめると，次のようになる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}dt$$

これを整理すると，次の結果を得る.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{2t}dt+\int_0^{\infty}e^{-2t}dt\right)=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{\infty}\right)=\frac{\pi}{2}$$

［解答 5.10］

(1) $f(t)=\mathrm{sgn}(t)\exp(-|t|)$ のフーリエ変換は，次のように求まる.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(t)\exp(-|t|)e^{-j\omega t}dt&=-\int_{-\infty}^{0}e^{(1-j\omega)t}dt+\int_0^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt\\&=-\left[\frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-1-j\omega}\right]_0^{\infty}\\&=-\frac{1}{1-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}=\frac{-2j\omega}{1+\omega^2}\end{aligned}$$

(2) (1)の結果をパーセバルの等式にあてはめると，次のようになる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\omega}{1+\omega^2}\right)^2 d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|t|}dt$$

これを整理すると，次の結果を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega=\frac{\pi}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{2t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-2t}dt\right)=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_{0}^{\infty}\right)=\frac{\pi}{2}$$

左辺の被積分関数 $\dfrac{\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)^2}$ は ω の偶関数であるから，次の結果を得る．

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega=\frac{\pi}{4}$$

第 6 章　フーリエ変換と線形システム

演習 6.1　インパルス応答が次の $h(t)$ で与えられる線形システムを考える.

$$h(t)=\begin{cases} t & (0\le t\le 1) \\ 0 & (t<0,1<t) \end{cases}$$

この線形システムに, 次の矩形パルス $f(t)$ を入力として加えたときの出力を求めよ.

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (0\le t\le 1) \\ 0 & (t<0,1<t) \end{cases}$$

演習 6.2　インパルス応答が次の $h(t)$ で与えられる線形システムを考える.

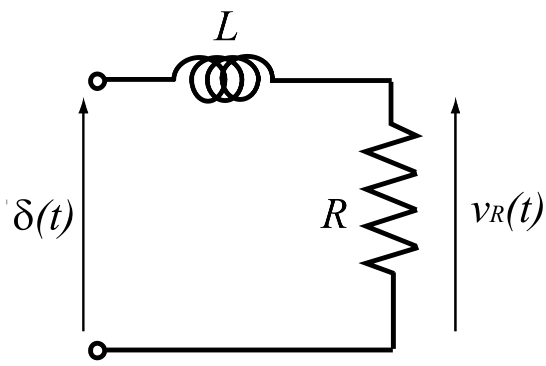
$$h(t)=\begin{cases} e^{-ct} & (0\le t) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

この線形システムに, 次の矩形パルス $f(t)$ を入力として加えたときの出力を求めよ.

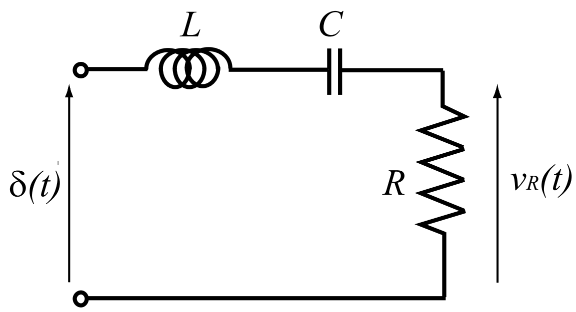
$$f(t)=\begin{cases} 1 & (0\le t\le a) \\ 0 & (t<0,a<t) \end{cases}$$

ただし, $a,c>0$ とする.

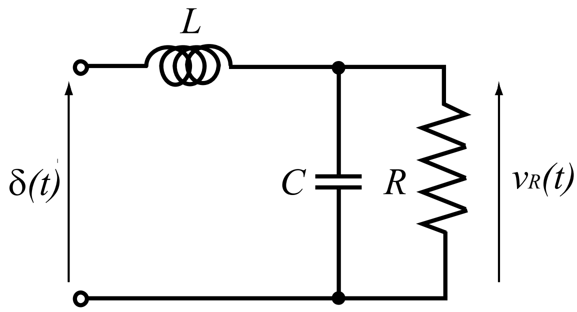
演習 6.3 図 6.1(a)～(c)に示す線形回路において, 抵抗 R の両端の電圧 $v_R(t)$ を応答と考える. それぞれの回路において, デルタ関数を入力として与えたときの応答（インパルス応答）のフーリエ変換 $H(\omega)$ を求めよ.



(a)LR 直列回路



(b)LCR 直列回路



(c)LCR 直並列回路

図 6.1　線形回路

演習 6.4　関数 $f(t)$ は実数値のみをとる関数であるとする．$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ の実数部を $R(\omega)$，虚数部を $X(\omega)$ として

$$F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

と表わすことにする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $R(\omega)$，$X(\omega)$ はそれぞれ次のように表わされることを示せ．

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

(2) $f(t)$ の偶関数部分を $f_E(t)$，奇関数部分を $f_O(t)$ として $f(t)=f_E(t)+f_O(t)$ と表すことにする．このとき，$R(\omega)$，$jX(\omega)$ は，それぞれ $f_E(t)$，$f_O(t)$ のフーリエ変換に等しいことを示せ．

演習 6.5　$t<0$ において $f(t)=0$ となるような時間関数を因果関数とよぶ．因果関数の $t>0$ における値は，$f(t)$ のフーリエ変換の実数部 $R(\omega)$ あるいは虚数部 $X(\omega)$ のみで次のように表現できることを示せ．ただし，$f(t)$ は実数値のみをとる関数とする．

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\omega)\cos\omega t d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X(\omega)\sin\omega t d\omega$$

［解答 6.1］

線形システムの出力 $g(t)$ は，入力 $f(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の畳み込み積分

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

で求められる．問題で与えられる $h(t)$ を用いると

$$g(t)=\int_0^1 f(t-\tau)\tau d\tau$$

となる． $f(t-\tau)$ と積分範囲 $0\le\tau\le1$ の関係は図 A6.1(a)～(d)のようになるので，上式は次のように計算される．

(a) $t<0$ の場合， $0\le\tau\le1$ で $f(t-\tau)=0$ であるから $g(t)=0$ となる．

(b) $0\le t<1$ の場合， $0\le\tau\le t$ で $f(t-\tau)=1$ ， $t<\tau\le1$ で $f(t-\tau)=0$ であるから $g(t)$ は次のように求まる．

$$g(t)=\int_0^t \tau d\tau=\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t=\frac{t^2}{2}$$

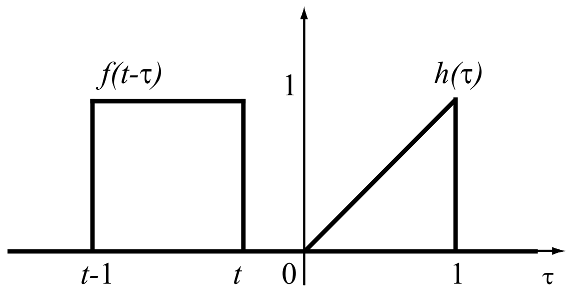
(c) $1\le t<2$ の場合， $0\le\tau<t-1$ で $f(t-\tau)=0$ ， $t-1\le\tau\le1$ で $f(t-\tau)=1$ であるから $g(t)$ は次のように求まる．

$$g(t)=\int_{t-1}^1 \tau d\tau=\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(t-1)^2=-\frac{1}{2}t^2+t$$

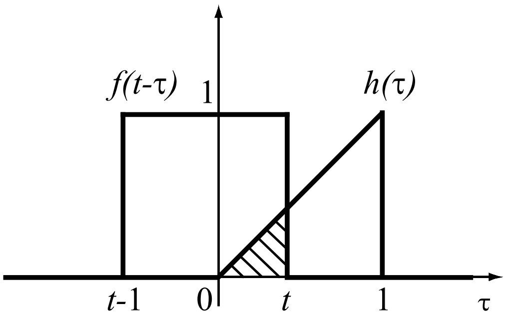
(d) $2\le t$ の場合， $0\le\tau\le1$ で $f(t-\tau)=0$ であるから $g(t)=0$ となる．

以上をまとめると，出力は次のようになる．

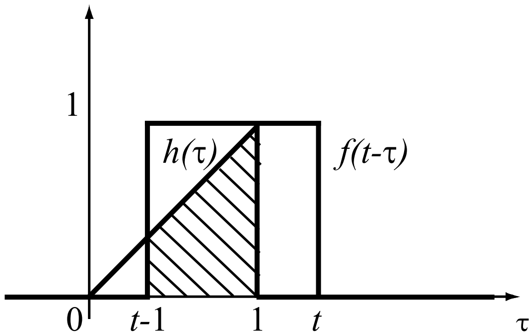
$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0, 2\le t) \\ \dfrac{t^2}{2} & (0\le t<1) \\ -\dfrac{t^2}{2}+t & (1\le t<2) \end{cases}$$



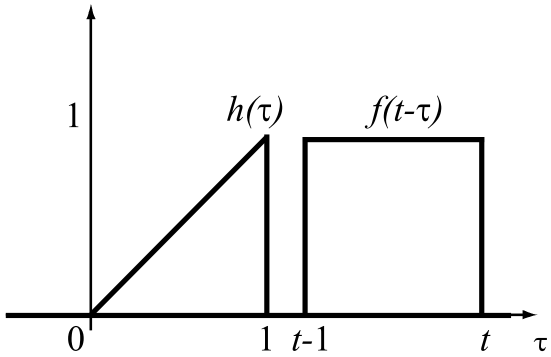
(a) $t<0$ の場合



(b) $0 \le t < 1$ の場合



(c) $1 \le t < 2$ の場合



(d) $2 \le t$ の場合

図 A6.1　解答 6.1 の説明図

［解答 6.2］

線形システムの出力 $g(t)$ は，入力 $f(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の畳み込み積分で求められるから，問題で与えられる $h(t)$ を用いると

$$g(t) = \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-c\tau} d\tau$$

となる．$f(t-\tau)$ と積分範囲の関係を考えると，上式は次のように計算される．（図 A6.2 参照）

(a) $t < 0$ の場合，$0 \le \tau$ で $f(t-\tau) = 0$ であるから $g(t) = 0$ となる．

(b) $0 \le t < a$ の場合，$0 \le \tau \le t$ で $f(t-\tau) = 1$，$t < \tau$ で $f(t-\tau) = 0$ であるから $g(t)$

は次のように求まる．

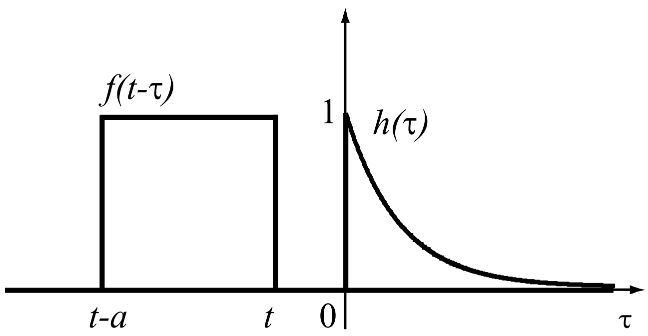
$$g(t)=\int_0^t e^{-c\tau}d\tau=\left[\frac{e^{-c\tau}}{-c}\right]_0^t=\frac{1-e^{-ct}}{c}$$

(c) $a\le t$ の場合，$t-a\le\tau\le t$ で $f(t-\tau)=1$，これ以外の範囲で $f(t-\tau)=0$ であるから $g(t)$ は次のように求まる．

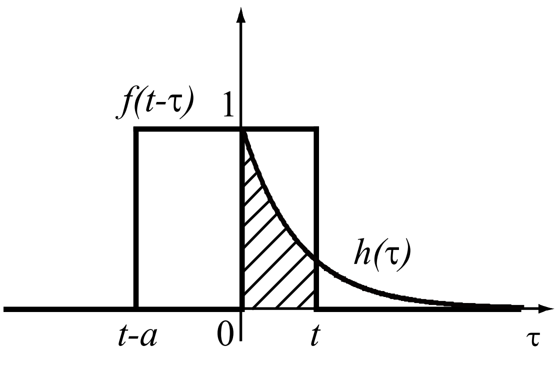
$$g(t)=\int_{t-a}^t e^{-c\tau}d\tau=\left[\frac{e^{-c\tau}}{-c}\right]_{t-a}^t=\frac{e^{-c(t-a)}-e^{-ct}}{c}=e^{-ct}\,\frac{e^{ac}-1}{c}$$

以上をまとめると，出力は次のようになる．

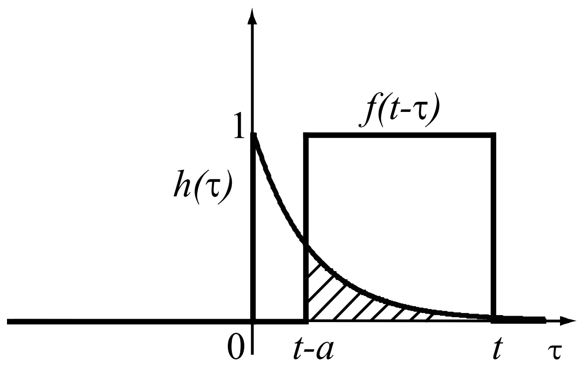
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ \dfrac{1-e^{-ct}}{c} & (0\le t<a)\\ e^{-ct}\,\dfrac{e^{ac}-1}{c} & (a\le t)\end{cases}$$



(a) $t<0$ の場合



(b) $0\le t<a$ の場合



(c) $a \le t$ の場合

図 A6.2　解答 6.2 の説明図

［解答 6.3］

いずれも正弦波交流 $e^{j\omega t}$ を入力した場合の定常応答 $v_R(t)$ を求めればよい.

(1) 回路に流れる電流は $\dot{I} = \dfrac{e^{j\omega t}}{R + j\omega L}$ であるから， $\dot{V}_R = \dfrac{e^{j\omega t}}{R + j\omega L} R$

したがって，インパルス応答のフーリエ変換は $H(\omega) = \dfrac{R}{R + j\omega L}$ と求まる.

(2) 回路に流れる電流は $\dot{I} = \dfrac{e^{j\omega t}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}$ であり,

$$\dot{V}_R = \frac{e^{j\omega t}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} R = \frac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} e^{j\omega t}$$

したがって， $H(\omega) = \dfrac{j\omega CR}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$

(3) インダクタンスに流れる電流は $\dot{I} = \dfrac{e^{j\omega t}}{j\omega L + \dfrac{\dfrac{R}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}}$ であり,

抵抗 R に流れる電流は

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega L + \dfrac{\dfrac{R}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}} \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{e^{j\omega t}}{R\left(1 - \omega^2 LC\right) + j\omega L}$$

と求まる．したがって，$\dot{V}_R = \dfrac{R}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}e^{j\omega t}$ であり，$H(\omega)$ は次のように求まる．

$$H(\omega) = \frac{R}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$$

［解答 6.4］

(1) 関数 $f(t)$ は実数値のみをとるので，そのフーリエ変換は次のようになる．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$$

したがって，$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt$，$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt$ となる．

(2) $f(t) = f_E(t) + f_O(t)$ を用いると次のようになる．

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_E(t)+f_O(t)\right)\cos\omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)\cos\omega t dt$$

ここで，$f_O(t)\cos\omega t$ は t の奇関数であるから $-\infty < t < \infty$ にわたる積分は 0 になることを用いている．上式の計算を進めると，次のようになる．

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)e^{j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)e^{-j\omega t}dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_E(-t')e^{-j\omega t'}dt' + \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)e^{-j\omega t}dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t)e^{-j\omega t}dt$$

すなわち，$R(\omega)$ は $f_E(t)$ のフーリエ変換に等しい．

　同様に，$f_E(t)\sin\omega t$ が t の奇関数であることを用いると，$jX(\omega)$ は次のように変形できる．

$$jX(\omega) = -j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt = -j\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_E(t)+f_O(t)\right)\sin\omega t dt$$
$$= -j\int_{-\infty}^{\infty} f_O(t)\sin\omega t dt = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_O(t)\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_O(-t')e^{-j\omega t'}dt' - \int_{-\infty}^{\infty} f_O(t)e^{-j\omega t}dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-\int_{-\infty}^{\infty} f_O(t')e^{-j\omega t'}dt' - \int_{-\infty}^{\infty} f_O(t)e^{-j\omega t}dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_O(t)e^{-j\omega t}dt$$

すなわち，$jX(\omega)$ は $f_O(t)$ のフーリエ変換に等しい．

［解答 6.5］

　因果関数 $f(t)$ では $t<0$ で $f(t)=0$ であり，その偶関数部 $f_E(t)$ と奇関数部 $f_O(t)$ が互いに打ち消しあう．したがって，$t>0$ における $f(t)$ は

$$f(t) = 2f_E(t) = 2f_O(t)$$

である．

一方, 演習 6.4 の結果より関数 $f_E(t)$ のフーリエ変換が $R(\omega)$ であるから，$R(\omega)$ のフーリエ逆変換を考えると次のようになる．

$$f_E(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)\left(\cos\omega t+j\sin\omega t\right)d\omega$$

さらに， $R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt$ より $R(\omega)$ は ω の偶関数であるから

$$f_E(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\omega)\cos\omega t d\omega$$

となる． $f(t)=2f_E(t)$ であるから，次の関係を得る．

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\omega)\cos\omega t d\omega$$

同様に，関数 $f_O(t)$ のフーリエ変換が $jX(\omega)$ であるから

$$f_O(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}jX(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\left(j\cos\omega t-\sin\omega t\right)d\omega$$

さらに， $X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt$ より $X(\omega)$ は ω の奇関数であるから

$$f_O(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)\sin\omega t d\omega$$

$f(t)=2f_O(t)$ より，次の関係を得る．

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}X(\omega)\sin\omega t d\omega$$

第 7 章　標本化定理

演習 7.1　次の問に答えよ．

(1)デルタ関数 $\delta(t)$ を一定の間隔 T_s ごとに繰り返して重ね合わせた関数は $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ と表すことができる．この関数を周期 T_s の周期関数とみなして複素フーリエ級数で展開し，次の式を導け．

$$\delta_T(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)$$

(2) $\delta_T(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)$ のフーリエ変換を求めよ．

(3) 関数 $f(t)$ を一定の間隔 T_s でサンプリングした関数値列は

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_s f(t)\delta(t-nT_s)$$

と表すことができる． $f_s(t)$ のフーリエ変換は，もとの関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が角周波数 $\frac{2\pi}{T_s}$ の間隔で周期的に現れる形になることを示せ．

演習 7.2　連続時間信号 $e^{j\omega t}$ を一定の時間間隔 T_s ごとにサンプリングして得られる離散時間信号が周期関数になる条件を求めよ．

演習 7.3　次の信号をサンプリングする場合に，エリアシングが発生しない最小のサンプリング周波数を求めよ．

(1) $\sin\omega_0 t+\cos\left(2\omega_0 t+\frac{2\pi}{3}\right)$

(2) $\sin^2\omega_0 t$

［解答 7.1］

(1) $\delta_T(t)$ は周期 T_s の周期関数であるから，次のように複素フーリエ級数で展開することができる．

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)$$

ここで，フーリエ係数の定義から

$$c_n=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)\exp\left(-j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)dt=\frac{1}{T_s}$$

と求まる．したがって，$\delta_T(t)=\dfrac{1}{T_s}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)$

(2) 定義に従って与式をフーリエ変換する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_T(t)e^{-j\omega t}dt&=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)e^{-j\omega t}dt\\&=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-j\left(\omega-\frac{2n\pi}{T_s}\right)t\right)dt=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2n\pi}{T_s}\right)\end{aligned}$$

(3) $f_s(t)$ のフーリエ変換を計算する．(1)の結果を利用して，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_s(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}T_sf(t)\delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)e^{-j\omega t}dt\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)e^{-j\omega t}dt\end{aligned}$$

さらに，フーリエ変換の性質 $\mathcal{F}[\exp(-jkt)f(t)]=F(\omega+k)$ を用いれば，

$$\mathcal{F}[f_s(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left[f(t)\exp\left(j\frac{2n\pi}{T_s}t\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\omega-\frac{2n\pi}{T_s}\right)$$

となる．すなわち，$\mathcal{F}[f_s(t)]$ は $F(\omega)$ が角周波数 $\dfrac{2\pi}{T_s}$ の間隔で周期的に繰り返される形となる．

［解答 7.2］

時間原点を t_0 として，一定の時間間隔 T_s ごとにサンプリングして離散時間信号を得るものとする．得られた離散時間信号が N 個のサンプリングごとに周期性をもつとすると，次の条件が成り立つ．

$$\exp\left(j\omega\left(nT_s+t_0\right)\right)=\exp\left(j\omega\left(\left(N+n\right)T_s+t_0\right)\right)$$

これより，

$$\exp\left(j\omega NT_s\right)=1$$

$$\omega NT_s=2m\pi \qquad (m \text{ は整数})$$

すなわち，$\dfrac{\omega T_s}{2\pi}=\dfrac{m}{N}$ となり，$\dfrac{\omega T_s}{2\pi}$ が有理数 $\dfrac{m}{N}$ になることが条件となる．

［解答 7.3］

(1) 信号に含まれる最も高い周波数成分は $f_m=\dfrac{2\omega_0}{2\pi}=\dfrac{\omega_0}{\pi}$ であるから，エリアシングが発生しないようにするためには $2f_m=\dfrac{2\omega_0}{\pi}$ 以上のサンプリング周波数でサンプリングしなくてはいけない．

(2) 信号は $\sin^2\omega_0 t=\dfrac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}$ であり，含まれる周波数は $f_m=\dfrac{2\omega_0}{2\pi}=\dfrac{\omega_0}{\pi}$ である．エリアシングが発生しないようにするためには，$2f_m=\dfrac{2\omega_0}{\pi}$ 以上のサンプリング周波数でサンプリングしなくてはいけない．

第８章　離散フーリエ変換

演習 8.1　周期 N の離散信号 $f(n)$ （$n = 0,1,2,\cdots N-1$）からなる信号列 $\{f(n)\}$ の離散フーリエ変換 $F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-kn}$ （$k = 0,1,2,\cdots N-1$）について，次のことを示せ．ただし，$W_N = \exp\left(j\frac{2\pi}{N} \right)$ である．

(1) $F(k)$ は N の周期性をもつ．すなわち $F(N+k) = F(k)$ が成り立つ．

(2) $\{f(n)\}$ が実数値のみをとるとき，$F(k)^* = F(N-k)$ となる．

(3) $\{f(n)\}$ の複素共役 $\{f(n)^*\}$ の離散フーリエ変換は $\left\{F(-k)^*\right\}$ となる．

演習 8.2　信号列 $\{f(n)\}$ の離散フーリエ変換を $F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{-kn}$ （$k = 0,1,2,\cdots N-1$）とするとき，次のパーセバルの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| f(n) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| F(k) \right|^2$$

演習 8.3 次の離散信号の離散フーリエ変換を求めよ．ただし，いずれも信号には N の周期性があるものとする．

(1) $$f_1(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{1}{2} & n = 1, N\text{-}1 \\ 0 & n = 2,3,\cdots,N\text{-}2 \end{cases}$$

(2) $$f_2(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \text{-}1 & n = 1, N\text{-}1 \\ 0 & n = 2,3,\cdots,N\text{-}2 \end{cases}$$

(3) $$f_3(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1,2,\cdots,(N\text{-}1)/2 \\ \text{-}1 & n = (N+1)/2, (N+3)/2, \cdots, N\text{-}1 \end{cases}$$ （N は奇数）

演習 8.4 次の離散信号列 $\left\{f_1(n)\right\}$，$\left\{f_2(n)\right\}$ の離散フーリエ変換を $\left\{F_1(k)\right\}$，$\left\{F_2(k)\right\}$ とする．

$$f_1(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ \dfrac{1}{2} & n=1,N\text{-}1\\ 0 & n=2,3,\cdots,N\text{-}2\end{cases}\quad,\quad f_2(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ \text{-}1 & n=1,N\text{-}1\\ 0 & n=2,3,\cdots,N\text{-}2\end{cases}$$

$\{f_1(n)\}$，$\{f_2(n)\}$に対して，次の式で畳み込み演算を定める．

$$g(n)=\sum_{j=0}^{N-1} f_1(j)f_2(n-j)\quad (n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

畳み込み演算によって得られる信号列$\{g(n)\}$の離散フーリエ変換を$\{G(k)\}$としたとき，$G(k)=F_1(k)F_2(k)$が成り立つことを確かめよ．

演習 8.5　サンプリング区間$-\dfrac{T}{2}\le t\le\dfrac{T}{2}$に対して，次の窓関数$w(t)$を考える．

(1) 方形窓　　$w(t)=1$

(2) ハン窓　　$w(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$

それぞれの窓関数に対して，サンプリング区間を等間隔で N 個サンプリングして得られる信号列$\{w(n)\}$（$n=0,1,2,\cdots,N-1$）の離散フーリエ変換$\{W(k)\}$を求めよ．

［解答 8.1］

(1) $F(N+k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-(N+k)n}=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}W_N^{-Nn}$

ここで，$W_N^{-Nn}=\exp(-j2n\pi)=1$ であるから次の式が成り立つ．

$$F(N+k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}=F(k)$$

(2) $\{f(n)\}$ が実数値のみをとるとき，

$$F(k)^*=\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}\right\}^*=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\left(W_N^{-kn}\right)^*$$

となる．ここで，$W_N^*=\exp\left(-j\dfrac{2\pi}{N}\right)=W_N^{-1}$ であるから次の関係が成り立つ．

$$F(k)^*=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{kn}=F(-k)=F(N-k)$$

最後の $F(-k)=F(N-k)$ は，(1)で示した $F(k)$ の周期性を用いている．

(3) $F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}$ の両辺の複素共役は次のように変形することができる．

$$F(k)^*=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)^*W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)^*W_N^{-(-k)n}$$

ここで，k を $-k$ と書き換えると $F(-k)^*=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)^*W_N^{-kn}$ となり，$\{f(n)^*\}$　の離散フーリエ変換は $F(-k)^*$ で与えられることがわかる．

［解答 8.2］

$W_N=\exp\left(j\dfrac{2\pi}{N}\right)$ を用いて $F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}$ と表わせるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}\left|F(k)\right|^2&=\sum_{k=0}^{N-1}F(k)F(k)^*\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-kn}\right\}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} f(m)^*W_N^{km}\right\}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f(n)f(m)^*\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}\end{aligned}$$

ここで，

$$\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}=\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}(m-n)\right)=\begin{cases}N & :m=n\\ 0 & :m\neq n\end{cases}$$

であるから，

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|F(k)\right|^2 = N\sum_{n=0}^{N-1} f(n)f(n)^* = N\sum_{n=0}^{N-1}\left|f(n)\right|^2$$

となり，パーセバルの等式が成り立つ．

［解答 8.3］

$W_N = \exp\left(j\dfrac{2\pi}{N}\right)$ であるから，$W_N{}^{-kN}$ などを用いる．

(1)

$$F_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_1(n)W_N{}^{-kn} = f_1(0) + f_1(1)W_N^{-k} + f_1(N-1)W_N^{-(N-1)k}$$

$$= 1 + \frac{W_N^{-k}}{2} + \frac{W_N^{-(N-1)k}}{2} = 1 + \frac{W_N^{-k}}{2} + \frac{W_N^{k}}{2} = 1 + \cos\frac{2\pi}{N}k$$

(2) $F_2(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} f_2(n)W_N{}^{-kn} = 1 - W_N^{-k} - W_N^{k} = 1 - 2\cos\frac{2\pi}{N}k$

(3)

$$F_3(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_3(n)W_N{}^{-kn}$$

$$= W_N^{-k} + W_N^{-2k} + \cdots + W_N^{-(N-1)k/2} - \left(W_N^{-(N+1)k/2} + \cdots W_N^{-(N-2)k} + + W_N^{-(N-1)k}\right)$$

$$= \left(W_N^{-k} - W_N^{-(N-1)k}\right) + \left(W_N^{-2k} - W_N^{-(N-2)k}\right) + \cdots + \left(W_N^{-(N-1)k/2} - W_N^{-(N+1)k/2}\right)$$

$$= \left(W_N^{-k} - W_N^{k}\right) + \left(W_N^{-2k} - W_N^{2k}\right) + \cdots + \left(W_N^{-(N-1)k/2} - W_N^{(N-1)k/2}\right)$$

$$= -2j\left(\sin\frac{2\pi}{N}k + \sin\frac{2\pi}{N}2k + \cdots + \sin\frac{2\pi}{N}\frac{N-1}{2}k\right)$$

［解答 8.4］

まず $\{g(n)\}$ を求める．

$$g(0) = \sum_{j=0}^{N-1} f_1(j)f_2(-j)$$

$$= f_1(0)f_2(0) + f_1(1)f_2(-1) + f_1(N-1)f_2(-N+1)$$

$$= f_1(0)f_2(0) + f_1(1)f_2(N-1) + f_1(N-1)f_2(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$g(1) = \sum_{j=0}^{N-1} f_1(j)f_2(1-j)$$

$$= f_1(0)f_2(1) + f_1(1)f_2(0) + f_1(N-1)f_2(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$g(2)=\sum_{j=0}^{N-1} f_1(j) f_2(2-j)$$

$$= f_1(0) f_2(2) + f_1(1) f_2(1) + f_1(N-1) f_2(3) = -\frac{1}{2}$$

$$g(N-2)=\sum_{j=0}^{N-1} f_1(j) f_2(N-2-j)$$

$$= f_1(0) f_2(N-2) + f_1(1) f_2(N-3) + f_1(N-1) f_2(N-1) = -\frac{1}{2}$$

$$g(N-1)=\sum_{j=0}^{N-1} f_1(j) f_2(N-1-j)$$

$$= f_1(0) f_2(N-1) + f_1(1) f_2(N-2) + f_1(N-1) f_2(0) = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

これらを用いると，$\{g(n)\}$の離散フーリエ変換は次のように求まる．

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N-1} g(n) {W_N}^{-kn} = -\frac{1}{2}\left({W_N}^{-k} + {W_N}^{-2k} + {W_N}^{-(N-2)k} + {W_N}^{-(N-1)k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left({W_N}^{-k} + {W_N}^{-2k} + {W_N}^{2k} + {W_N}^{k}\right) = -\cos\frac{2\pi}{N}k - \cos\frac{4\pi}{N}k$$

一方，$\{f_1(n)\}$，$\{f_2(n)\}$の離散フーリエ変換$\{F_1(k)\}$，$\{F_2(k)\}$に演習 8.3 の結果を用いると

$$F_1(k) F_2(k) = \left(1+\cos\frac{2\pi}{N}k\right)\left(1-2\cos\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$= 1-\cos\frac{2\pi}{N}k - 2\cos^2\frac{2\pi}{N}k = -\cos\frac{2\pi}{N}k - \cos\frac{4\pi}{N}k$$

となり，確かに$G(k)=F_1(k)F_2(k)$が成り立つ．

［解答 8.5］

区間Tを N 等分してサンプリングするので，サンプリング点は$t_n = -\frac{T}{2} + n\frac{T}{N}$

$(n=0,1,2,\cdots,N-1)$となる．

(1) 方形窓の場合，全てのサンプリング時刻で$w(n)=1$であるから，信号列$\{w(n)\}$の離散フーリエ変換は次のように求まる．

$$W(k)=\sum_{n=0}^{N-1} w(n) {W_N}^{-kn} = \sum_{n=0}^{N-1} {W_N}^{-kn}$$

ただし，$W_N = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$である．

(i) $k=0$の場合，${W_N}^{-k}=1$であるから

$$W(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}=N$$

(ii) $k\neq 0$ の場合，$W_N{}^N=1$ であることを用いると

$$W(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}=\frac{1-W_N{}^{-kN}}{1-W_N{}^{-k}}=0$$

すなわち，$\{w(n)\}$ の離散フーリエ変換は次のように求まる．

$$W(k)=\begin{cases}N & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

(2) ハン窓の場合，$t_n=-\frac{T}{2}+n\frac{T}{N}$ におけるサンプリング値 $w(n)$ は，次の式に従って定まる．

$$w(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}+n\frac{T}{N}\right)\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)$$

したがって，信号列 $\{w(n)\}$ の離散フーリエ変換は，次の式で求められる．

$$\begin{aligned}W(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right\}W_N{}^{-kn}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}\left\{\exp\left(j\frac{2n\pi}{N}\right)+\exp\left(-j\frac{2n\pi}{N}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}W_N{}^{-kn}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left\{W_N{}^{-(k-1)n}+W_N{}^{-(k+1)n}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$W_N{}^N=W_N{}^{-N}=1$ であることを用いると，次のように離散フーリエ変換が求まる．

(i) $k=0$ の場合

$$\begin{aligned}W(k)&=\frac{N}{2}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N{}^n+W_N{}^{-n}\right)\\&=\frac{N}{2}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1-W_N{}^N}{1-W_N}+\frac{1-W_N{}^{-N}}{1-W_N{}^{-1}}\right)=\frac{N}{2}\end{aligned}$$

(ii) $k=1$ の場合

$$W(k)=\frac{1}{2}\frac{1-W_N{}^{-N}}{1-W_N{}^{-1}}-\frac{1}{4}\left(N+\frac{1-W_N{}^{-2N}}{1-W_N{}^{-2}}\right)=-\frac{N}{4}$$

(iii) k が上記以外の場合，

$$W(k)=\frac{1}{2}\frac{1-W_N{}^{-kN}}{1-W_N{}^{-k}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1-W_N{}^{-(k-1)N}}{1-W_N{}^{-(k-1)}}+\frac{1-W_N{}^{-(k+1)N}}{1-W_N{}^{-(k+1)}}\right)=0$$

すなわち，$\{w(n)\}$の離散フーリエ変換は次のように求まる．

$$W(k)=\begin{cases}\dfrac{N}{2} & (k=0)\\ -\dfrac{N}{4} & (k=1)\\ 0 & (k\neq 0, k\neq 1)\end{cases}$$

第 9 章　高速フーリエ変換

演習 9.1　次の問に答えよ.

(1) 周期 T の周期関数を一定間隔 $T_s = \dfrac{T}{4}$ でサンプリングして得られる次の離散信号列 $\{f(n)\}$ と $\{g(n)\}$ $(n = 0,1,2,3)$ の離散フーリエ変換を求めよ. ただし, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする.

(a) $f(n) = 1 + 2\cos(\omega_0 n T_s) + \sin\left(\omega_0 n T_s + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $g(n) = 1 + 2\cos\left(\omega_0 n T_s - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\omega_0 n T_s)$

(2) $\{f(n)\}$ を m サンプリング間隔だけ時間軸上でシフトした離散信号列を $\{g(n)\}$ とすると, 各々の離散フーリエ変換 $\{F(k)\}$ と $\{G(k)\}$ の間には

$$G(k) = W_N{}^{-km} F(k)$$

という関係が成り立つ. (1)の結果を用いて, このことを確かめよ.

［解答 9.1］

(1) $N = 4$ の場合, $W_4 = \exp\left(j\dfrac{\pi}{2}\right) = j$ であるから,

$$\mathbf{M}_4{}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

(a)信号列を表す式は次のように整理される.

$$f(n) = 1 + 2\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 3\cos\frac{n\pi}{2}$$

これより, $f(0) = 4$, $f(1) = 1$, $f(2) = -2$, $f(3) = 1$ であり, この離散フーリエ変換は, 次のように求まる.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b)信号列を表す式は次のように整理される.

$$g(n)=1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{n\pi}{2}=1+3\sin\frac{n\pi}{2}$$

これより，$g(0)=1$，$g(1)=4$，$g(2)=1$，$g(3)=-2$ であり，この離散フーリエ変換は，次のように求まる．

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -6j\\ 0\\ 6j\end{bmatrix}$$

(2)まず，信号列$\{f(n)\}$と$\{g(n)\}$を比べると，$\{f(n)\}=\{4,1,-2,1\}$，$\{g(n)\}=\{1,4,1,-2\}$となっており，$\{g(n)\}$は信号列$\{f(n)\}$を 1 サンプル点だけシフトしたものになっている．
また，(1)で(a)と(b)の結果を比べると，

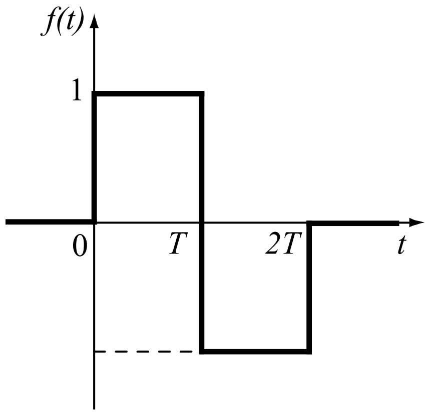
$G(0)=W_4{}^{0}F(0)=F(0)$，$G(1)=W_4{}^{-1}F(1)=-jF(1)$，

$G(2)=W_4{}^{-2}F(2)=-F(2)$，$G(3)=W_4{}^{-3}F(3)=jF(3)$

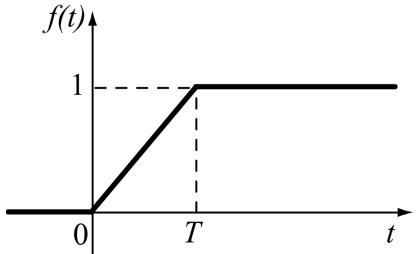
という関係が成り立つ．すなわち，$N=4$，$m=1$ として，$G(k)=W_N{}^{-km}F(k)$ ($k=0,1,2,3$)なる関係が成り立っている．

第 10 章　ラプラス変換の基礎

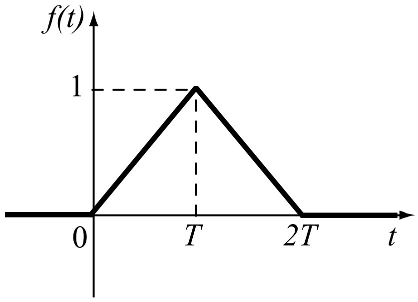
演習 10.1　図 10.1(a)～(c)に示す関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ。



(a)



(b)



(c)

図 10.1

演習 10.2　次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．ただし，いずれの関数も $t<0$ で $f(t)=0$ である．また，$a>0$ とする．

(1) $f(t)=\begin{cases} 1 & (0 \le t \le a) \\ -1 & (a<t) \end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1) \\ t & (1<t) \end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1) \\ e^{-a(t-1)} & (1<t) \end{cases}$

演習 10.3　次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．ただし，いずれの関数も $t<0$ で $f(t)=0$ である．

(1) $f(t)=t+t^2$

(2) $f(t)=(1-t)^2$

(3) $f(t) = te^{at}$

(4) $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$　（θは定数）

[解答 10.1]

いずれも定義に従ってラプラス変換を求める.

(1)

$$F(s)=\int_0^T e^{-st}dt-\int_T^{2T} e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T-\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^{2T}$$

$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}+\frac{e^{-2Ts}-e^{-Ts}}{s}=\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{s}$$

(2)

$$F(s)=\int_0^T \frac{t}{T}e^{-st}dt+\int_T^{\infty} e^{-st}dt$$

$$=\left[\frac{t}{T}\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T+\frac{1}{Ts}\int_0^T e^{-st}dt+\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^{\infty}$$

$$=\frac{-e^{-Ts}}{s}+\left[\frac{e^{-st}}{-Ts^2}\right]_0^T+\frac{e^{-Ts}}{s}=\frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2}$$

(3)

$$F(s)=\int_0^T \frac{t}{T}e^{-st}dt+\int_T^{2T}\left(2-\frac{t}{T}\right)e^{-st}dt$$

$$=\left[\frac{t}{T}\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T+\frac{1}{Ts}\int_0^T e^{-st}dt+\left[\left(2-\frac{t}{T}\right)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^{2T}-\frac{1}{Ts}\int_T^{2T} e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-Ts}}{s}+\left[\frac{e^{-st}}{-Ts^2}\right]_0^T+\frac{e^{-Ts}}{s}+\left[\frac{e^{-st}}{Ts^2}\right]_T^{2T}$$

$$=\frac{1-e^{-Ts}}{Ts^2}+\frac{e^{-2Ts}-e^{-Ts}}{Ts^2}=\frac{\left(1-e^{-Ts}\right)^2}{Ts^2}$$

[解答 10.2]

いずれも定義に従ってラプラス変換を求める.

(1)

$$F(s)=\int_0^a e^{-st}dt-\int_a^{\infty} e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a-\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^{\infty}$$

$$=\frac{1-e^{-as}}{s}-\frac{e^{-as}}{s}=\frac{1-2e^{-as}}{s}$$

(2)

$$F(s)=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^\infty te^{-st}dt$$

$$=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1+\left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^\infty+\int_1^\infty\frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_1^\infty=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$$

(3)

$$F(s)=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^\infty e^{-a(t-1)}e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1+\left[e^a\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_1^\infty$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s}+e^a\frac{e^{-(s+a)}}{s+a}=\frac{1-e^{-s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s+a}$$

[解答 10.3]

いずれも定義に従ってラプラス変換を求める.

(1)

$$F(s)=\int_0^\infty (t+t^2)e^{-st}dt=\left[(t+t^2)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty+\int_0^\infty(1+2t)\frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$=\left[(1+2t)\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2\frac{e^{-st}}{-s^2}dt=\frac{1}{s^2}+\left[2\frac{e^{-st}}{s^3}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

(2)

$$F(s)=\int_0^\infty (1-t)^2e^{-st}dt=\left[(1-t)^2\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty+\int_0^\infty 2(t-1)\frac{e^{-st}}{s}dt$$

$$=\frac{1}{s}+\left[2(t-1)\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{2e^{-st}}{-s^2}dt$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\left[\frac{2e^{-st}}{s^3}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}$$

(3)

$$F(s)=\int_0^\infty te^{at}e^{-st}dt=\int_0^\infty te^{-(s-a)t}dt$$

$$=\left[\frac{te^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty+\frac{1}{s-a}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)^2}\right]_0^\infty=\frac{1}{(s-a)^2}$$

(4)

$$F(s)=\int_0^{\infty}\sin(\omega t+\theta)e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left\{e^{j\theta}e^{(-s+j\omega)t}-e^{-j\theta}e^{(-s-j\omega)t}\right\}dt$$

$$=\frac{e^{j\theta}}{2j}\left[\frac{e^{(-s+j\omega)t}}{-s+j\omega}\right]_0^{\infty}-\frac{e^{-j\theta}}{2j}\left[\frac{e^{(-s-j\omega)t}}{-s-j\omega}\right]_0^{\infty}=\frac{e^{j\theta}}{2j}\frac{1}{s-j\omega}-\frac{e^{-j\theta}}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$$

$$=\frac{\cos\theta+j\sin\theta}{2j}\frac{1}{s-j\omega}-\frac{\cos\theta-j\sin\theta}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)+\frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

第 11 章　ラプラス変換の性質

演習 11.1　次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $f(t) = te^{at}$

(2) $f(t) = t^2 e^{at}$

演習 11.2　$\mathcal{L}[\sin\omega_0 t] = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$ とラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0)$ を用いて，$\cos\omega_0 t$ のラプラス変換を求めよ．

演習 11.3　関数 $f(t)$ のラプラス変換が $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ であるとき，次の式が成り立つことを示せ．

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

演習 11.4　次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $f(t) = t\sin\omega_0 t$

(2) $f(t) = t\cos\omega_0 t$

(3) $f(t) = t^2 e^{at} \sin\omega_0 t$

演習 11.5　$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \log\dfrac{s+1}{s-2}$ のとき，関係式 $\mathcal{L}\left[tf(t)\right] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ を用いて $F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求めよ．

演習 11.6　次の関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ に対してたたみ込み関数

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

を求め，そのラプラス変換について $\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2]$ が成り立つことを示せ．

$$f_1(t) = \begin{cases} \cos t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

演習 11.7　たたみ込み関数のラプラス変換を用いて，次のラプラス逆変換を求めよ．
ただし，$\omega \neq 0$ とする．

(1) $\dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

(2) $\dfrac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

［解答 11.1］

(1) $\mathcal{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$ であるから，ラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$ を用いて

$$\mathcal{L}[te^{at}]=\frac{1}{(s-a)^2}$$

(2) $\mathcal{L}[t^2]=\dfrac{2}{s^3}$ であるから，ラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$ を用いて

$$\mathcal{L}[t^2e^{at}]=\frac{2}{(s-a)^3}$$

［解答 11.2］

$f(t)=\sin\omega_0 t$ と考えると， $\dfrac{d}{dt}f(t)=\omega_0\cos\omega_0 t$ ， $f(0)=0$ であるから，
$\mathcal{L}\left[f^{'}(t)\right]=sF(s)-f(0)$ を用いれば $\cos\omega_0 t$ のラプラス変換は次のように求まる．

$$\mathcal{L}[\cos\omega_0 t]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\sin\omega_0 t\right]=\frac{s}{\omega_0}\mathcal{L}[\sin\omega_0 t]=\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$$

［解答 11.3］

関数 $f(t)$ のラプラス変換の定義 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ で，両辺を s で微分すると，

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt=\int_0^\infty(-t)f(t)e^{-st}dt$$

したがって，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$$

同様に，

$$\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\int_0^\infty f(t)\frac{d^ne^{-st}}{ds^n}dt=\int_0^\infty(-t)^n f(t)e^{-st}dt$$

より

$$\mathcal{L}\left[t^nf(t)\right]=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

［解答 11.4］

(1) $\mathcal{L}[\sin\omega_0 t] = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$ と，ラプラス変換の性質 $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ を用いて

$$\mathcal{L}[t\sin\omega_0 t] = -\frac{d}{ds}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2} = \frac{2\omega_0 s}{\left(s^2+\omega_0{}^2\right)^2}$$

(2) $\mathcal{L}[\cos\omega_0 t] = \dfrac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$ と，ラプラス変換の性質 $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ を用いて

$$\mathcal{L}[t\cos\omega_0 t] = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2} = -\frac{s^2+\omega_0{}^2-2s^2}{\left(s^2+\omega_0{}^2\right)^2} = \frac{s^2-\omega_0{}^2}{\left(s^2+\omega_0{}^2\right)^2}$$

(3) $g(t) = e^{at}\sin\omega_0 t$ とすると $G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \dfrac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0{}^2}$ である。これに，関係式 $\mathcal{L}\left[t^2 g(t)\right] = (-1)^2\dfrac{d^2G(s)}{ds^2}$ を用いると，次のように求まる.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 g(t)] = \frac{d^2G(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0{}^2}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{-2\omega_0(s-a)}{\left\{(s-a)^2+\omega_0{}^2\right\}^2}$$

$$= -2\omega_0\frac{\left\{(s-a)^2+\omega_0{}^2\right\}^2-4(s-a)^2\left\{(s-a)^2+\omega_0{}^2\right\}}{\left\{(s-a)^2+\omega_0{}^2\right\}^4}$$

$$= 2\omega_0\frac{3(s-a)^2-\omega_0{}^2}{\left\{(s-a)^2+\omega_0{}^2\right\}^3}$$

［解答 11.5］

$-\dfrac{dF(s)}{ds} = -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-2}$ であり，これを $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ にあてはめると次のようになる.

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}-e^{-t}$$

したがって，$F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ は次のように求まる.

$$f(t) = \frac{e^{2t}-e^{-t}}{t}$$

［解答 11.6］

$t<0$ で関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ の値がいずれも 0 であることに注意して，たたみ込み関数を求める．

$$
\begin{aligned}
f_1 * f_2 &= \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \left(\sin t\cos^2\tau - \cos t\sin\tau\cos\tau\right)d\tau \\
&= \int_0^t \left(\sin t\frac{1+\cos 2\tau}{2} - \frac{1}{2}\cos t\sin 2\tau\right)d\tau \\
&= \sin t\left[\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau\right]_0^t - \frac{1}{2}\cos t\left[-\frac{1}{2}\cos 2\tau\right]_0^t \\
&= \sin t\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + \frac{1}{4}\cos t\cos 2t - \frac{1}{4}\cos t \\
&= \frac{1}{2}t\sin t
\end{aligned}
$$

さらに，$\mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$ と $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$ であることを用いると，$f_1 * f_2$ のラプラス変換は次のように求まる．

$$
\mathcal{L}[f_1 * f_2] = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}
$$

一方，$\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[\cos t] = \dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathcal{L}[f_2] = \mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$ であるから

$$
\mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2] = \frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}
$$

となり，確かに $\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1]\mathcal{L}[f_2]$ が成り立つ．

［解答 11.7］

与式を二つのラプラス変換の積と考えると，そのラプラス逆変換は次のように二つの関数のたたみ込み積分で求めることができる．

(1)与式を $\mathcal{L}[\sin\omega t]$ と $\mathcal{L}[\sin\omega t]$ の積に比例すると考えると，次のようにラプラス逆変換が求まる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t * \sin\omega t=\frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega\tau\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\int_0^t\{-\cos\omega t+\cos(2\omega\tau-\omega t)\}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\left[-(\cos\omega t)\tau+\frac{\sin(2\omega\tau-\omega t)}{2\omega}\right]_0^t=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-t\cos\omega t\right)$$

(2)与式を $\mathcal{L}[\cos\omega t]$ と $\mathcal{L}[\cos\omega t]$ の積と考えると, 次のようにラプラス逆変換が求まる.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right]=\cos\omega t * \cos\omega t=\int_0^t \cos\omega\tau\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\{\cos\omega t+\cos(2\omega\tau-\omega t)\}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\cos\omega t)\tau+\frac{\sin(2\omega\tau-\omega t)}{2\omega}\right]_0^t=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}+t\cos\omega t\right)$$

第 12 章　ラプラス変換の定係数常微分方程式への応用

演習 12.1　次のラプラス変換$F(s)$を部分分数に分解し，そのラプラス逆変換を求めよ．

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-2s-3}$　　(2) $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2-5s+6}$

(3) $F(s)=\dfrac{s}{(s+2)(s+3)(s+4)}$　　(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2}$

(5) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2(s-1)}$

演習 12.2　次の関数のラプラス逆変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{as+1}$　　(2) $\dfrac{1}{s^2-a^2}$　　(3) $\dfrac{1}{(s-a)^2}$　　(4) $\dfrac{e^{-s}}{s^3}$

演習 12.3　次の関数$F(s)$のラプラス逆変換を求めよ．

(1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2+1}$　　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$

演習 12.4　関数$f(t)$のラプラス変換が$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$であるとき，次の関数のラプラス逆変換を$f(t)$で表せ．ただし，$a>0$とする．

(1) $\dfrac{F(s)}{s^2}$　　(2) $\dfrac{F(s)}{s-a}$　　(3) $\dfrac{F(s)}{s^2+a^2}$　　(4) $\dfrac{sF(s)}{s^2+a^2}$　　(5) $\dfrac{sF(s)}{s^2-a^2}$

演習 12.5　ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dt}+4y=0 \quad (t>0)$，初期条件は$y(0)=2$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+6y=0 \quad (t>0)$，初期条件は$y(0)=-\dfrac{1}{2}$，$y'(0)=1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+3y=t \quad (t>0)$，初期条件は$y(0)=-1$，$y'(0)=1$

［解答 12.1］

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-2s-3}=\dfrac{1}{(s-3)(s+1)}=\dfrac{a}{s-3}+\dfrac{b}{s+1}$ とおくと，

$a=\left(s-3)\right)F(s)\Big|_{s=3}=\dfrac{1}{4}$，$b=\left(s+1)\right)F(s)\Big|_{s=-1}=-\dfrac{1}{4}$ より，次のように部分分数に分解される．

$$F(s)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right)$$

逆変換は $f(t)=\dfrac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)$

(2) $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2-5s+6}=\dfrac{s-1}{(s-2)(s-3)}=\dfrac{a}{s-3}+\dfrac{b}{s-2}$ とおくと，

$a=(s-3)F(s)\Big|_{s=3}=\left.\dfrac{s-1}{s-2}\right|_{s=3}=2$，$b=(s-2)F(s)\Big|_{s=2}=\left.\dfrac{s-1}{s-3}\right|_{s=2}=-1$ より，

$$F(s)=\frac{s-1}{s^2-5s+6}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s-2}$$

と部分分数に分解される．逆変換は $f(t)=2e^{3t}-e^{2t}$

(3) $F(s)=\dfrac{s}{(s+2)(s+3)(s+4)}=\dfrac{a}{s+2}+\dfrac{b}{s+3}+\dfrac{c}{s+4}$ とおくと，

$$a=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\left.\frac{s}{(s+3)(s+4)}\right|_{s=-2}=-1,$$

$$b=(s+3)F(s)\Big|_{s=-3}=\left.\frac{s}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-3}=3,$$

$$c=(s+4)F(s)\Big|_{s=-4}=\left.\frac{s}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-4}=-2$$

より，次のように部分分数に分解される．

$$F(s)=-\frac{1}{s+2}+\frac{3}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

逆変換は，$f(t)=-e^{-2t}+3e^{-3t}-2e^{-4t}$

(4) $s=1$ は重根であるから，$F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2}=\dfrac{a}{s-1}+\dfrac{b}{(s-1)^2}$ と部分分数に分解される．ここで $\left(s-1\right)^2F(s)=s$ であるから，

$$b=\left(s-1\right)^2F(s)\Big|_{s=1}=1,\quad a=\frac{1}{\left(2-1\right)!}\frac{d}{ds}\left(s-1\right)^2F(s)\Big|_{s=1}=1$$

となる．したがって，

$$F(s)=\frac{s}{(s-1)^2}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

と部分分数に分解される．逆変換は，$f(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$

(5) $s=-1$ は 2 重根であるから，$F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2(s-1)}=\dfrac{a}{s+1}+\dfrac{b}{(s+1)^2}+\dfrac{c}{s-1}$ と部分分数に分解される．ここで，$F(s)(s+1)^2=\dfrac{s}{s-1}$ であるから，

$$b=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s-1-s}{(s-1)^2}\Big|_{s=-1}=-\frac{1}{4}$$

$$c=(s-1)F(s)\Big|_{s=1}=\frac{1}{4}$$

したがって，

$$F(s)=-\frac{1}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}+\frac{1}{4(s-1)}$$

と部分分数に分解される．逆変換は，$f(t)=-\dfrac{1}{4}e^{-t}+\dfrac{t}{2}e^{-t}+\dfrac{1}{4}e^t$

［解答 12.2］

(1) $\dfrac{1}{as+1}=\dfrac{1}{a\left(s+\frac{1}{a}\right)}$ と変形できるから，ラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$ を用いれば $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{as+1}\right]=\dfrac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}$ と逆変換される．

(2) $\dfrac{1}{s^2-a^2}=\dfrac{ja}{ja(s^2-a^2)}$ と変形し，$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ において $\omega=ja$ とすれば，$\dfrac{1}{s^2-a^2}$ のラプラス逆変換は次のように求まる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right]=\frac{1}{ja}\sin(jat)=\frac{1}{ja}\frac{e^{j(jat)}-e^{-j(jat)}}{2j}=\frac{\sinh at}{a}$$

(3) $\mathcal{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$ とラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$ を用いれば，

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at}$ とラプラス逆変換される．

(4) $\mathcal{L}\left[t^2\right]=\dfrac{2}{s^3}$ とラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[f(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$ を用いれば，

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s^3}\right]=\dfrac{(t-1)^2}{2}$ $(t\geq 1)$とラプラス逆変換される．ただし，$1\geq t$ では$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s^3}\right]=0$

である．

［解答 12.3］

(1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)^2+1}=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}+\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$ と変形し，$\mathcal{L}\left[\cos t\right]=\dfrac{s}{s^2+1}$ ，

$\mathcal{L}\left[\sin t\right]=\dfrac{1}{s^2+1}$ 及びラプラス変換の性質 $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$ を用いれば，

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-1)^2+1}\right]=e^{t}(\cos t+\sin t)$ とラプラス逆変換できる．

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2+a^2}\right)$ と変形し，$\mathcal{L}\left[t\right]=\dfrac{1}{s^2}$，$\mathcal{L}\left[\sin at\right]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

を用いれば,

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}\right]=\dfrac{1}{a^2}\left(t-\dfrac{\sin at}{a}\right)$ とラプラス逆変換できる．

［解答 12.4］

いずれもたたみ込み関数のラプラス変換として考える．

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right]=t$ であるから，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)(t-\tau)d\tau=\int_0^t(t-\tau)f(\tau)d\tau$ と表される．

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$ であるから，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s-a}\right]=\int_0^t f(\tau)e^{a(t-\tau)}d\tau$ と表される．

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+a^2}\right]=\dfrac{\sin at}{a}$ であるから，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s^2+a^2}\right]=\dfrac{1}{a}\int_0^t f(\tau)\sin a(t-\tau)d\tau$ と表される．

(4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$ であるから，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sF(s)}{s^2+a^2}\right]=\int_0^t f(\tau)\cos a(t-\tau)d\tau$ と表される．

(5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-a^2}\right]=\cosh at$ であるから，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sF(s)}{s^2-a^2}\right]=\int_0^t f(\tau)\cosh a(t-\tau)d\tau$ と表され

る．

［解答 12.5］

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として両辺をラプラス変換して $Y(s)$ を求め，これをラプラス逆変換して微分方程式の解 $y(t)$ を求める．

(1) $sY(s) - 2 + 4Y(s) = 0$ より $Y(s) = \dfrac{2}{s+4}$

これをラプラス逆変換して，微分方程式の解は $y(t) = 2e^{-4t}$ と求まる．

(2)初期値 $y(0) = -\dfrac{1}{2}$， $y'(0) = 1$ を用いると，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) + \frac{1}{2}s - 1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0) = sY(s) + \frac{1}{2}$$

となり，与えられた微分方程式は次のようにラプラス変換される．

$$s^2Y(s) + \frac{1}{2}s - 1 + 4sY(s) + 2 + 6Y(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 4s + 6\right)Y(s) = -\frac{s+2}{2}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2}$$

ラプラス逆変換して，微分方程式の解は $y(t) = -\dfrac{e^{-2t}}{2}\cos\sqrt{2}t$ と求まる．

(3)初期条件 $y(0) = -1$， $y'(0) = 1$ を用いると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) + s - 1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) + 1$$

となり，与えられた微分方程式は次のようにラプラス変換される．

$$s^2Y(s) + s - 1 + 2sY(s) + 2 + 3Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^2\left(s^2+2s+3\right)} - \frac{s+1}{s^2+2s+3} \\
&= \frac{1}{9}\frac{-2s+3}{s^2} + \frac{1}{9}\frac{2s+1}{s^2+2s+3} - \frac{s+1}{s^2+2s+3} \\
&= \frac{1}{9}\left(-\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2}\right) - \frac{1}{9}\frac{7(s+1)+1}{(s+1)^2+2} \\
&= \frac{1}{9}\left(-\frac{2}{s}+\frac{3}{s^2} - 7\frac{s+1}{(s+1)^2+2} - \frac{1}{(s+1)^2+2}\right)
\end{aligned}
$$

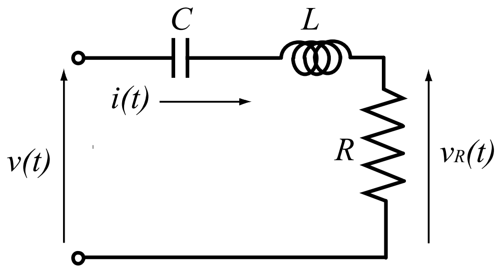
各項をラプラス逆変換して，微分方程式の解は

$$
y(t) = \frac{1}{9}\left(3t - 2 - 7e^{-t}\cos\sqrt{2}t - \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right)
$$

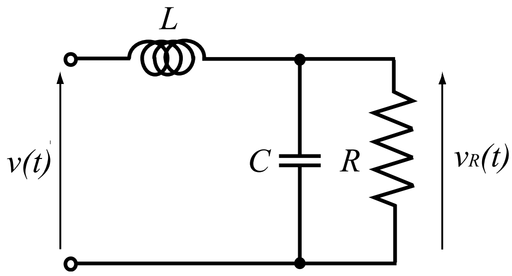
と求まる.

第 13 章　ラプラス変換と線形システム

演習 13.1　図 13.1(a)，(b)に示す線形回路において，抵抗 R の両端の電圧 $v_R(t)$ を応答と考える．入力電圧 $v(t)$ に対する $v_R(t)$ の伝達関数 $H(s)$ を求めよ．また，この系（応答）は安定であるかどうか，理由とともに答えよ．



(a)LCR 直列回路



(b)LCR 直並列回路

図 13.1　線形回路

演習 13.2 伝達関数が $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$ で与えられる線形システムに，次の入力 $f(t)$ を与えた場合の応答 $g(t)$ を求めよ．ただし $u(t)$ は階段関数である．

(1) $f(t)=u(t)$

(2) $f(t)=tu(t)$

(3) $f(t)=u(t)\sin t$

演習 13.3　二つの線形システム S_1，S_2 において，入力 $f_i(t)$ に対する応答 $y_i(t)$ が次の関係に従うものとする．

$$\tau_i \frac{dy_i(t)}{dt}+y_i(t)=A_i f_i(t) \quad (i=1,2)$$

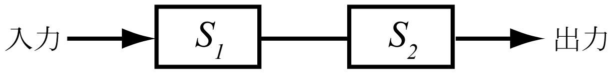
ここで，τ_i と A_i は定数である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)システム S_1，S_2 のインパルス応答 $h_1(t)$，$h_2(t)$ を求めよ．

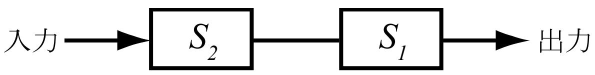
(2)システム S_1，S_2 に階段関数を入力として与えた場合の応答 $g_1(t)$，$g_2(t)$ を求めよ．

(3)二つのシステムを直列に接続したシステム S を考える．図 13.2 に示す二つの接続で，システム S の伝達関数が等しいことを示せ．

(4)二つのシステムを直列に接続したシステム S に階段関数を入力として与えた場合の応答 $g(t)$ を求めよ．



(a)



(b)

図 13.2　二つの線形システムの直列接続

［解答 13.1］

(1)回路に流れる電流を$i(t)$，コンデンサの両端の電圧を$v_c(t)$とすると，次の関係式が成り立つ．

$$L\frac{di}{dt}+Ri+v_c=v$$

$$i=C\frac{dv_c}{dt}$$

すなわち，$LC\dfrac{d^2v_c}{dt^2}+CR\dfrac{dv_c}{dt}+v_c=v$

ここで，$v(t)=\delta(t)$として関係式をラプラス変換すると，

$$LCs^2V_c(s)+CRsV_c(s)+V_c(s)=1$$

$$V_c(s)=\frac{1}{LCs^2+CRs+1}$$

一方，応答は$v_R=Ri=CR\dfrac{dv_c}{dt}$であるので，伝達関数は次のように求められる．

$$H(s)=CRsV_c(s)=\frac{CRs}{LCs^2+CRs+1}$$

伝達関数の極は，$LCs^2+CRs+1=0$より$s=\dfrac{-CR\pm\sqrt{C^2R^2\text{-}4LC}}{2LC}$である．$L$, C, Rはいずれも正であるから，極の実部は負となる．したがってこの応答は安定である．

(2)インダクタンスに流れる電流を$i(t)$，コンデンサの両端の電圧を$v_c(t)$とすると，電圧電流の関係式は次のようになる．

$$L\frac{di}{dt}+v_c=v$$

$$i=C\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{R}$$

これより，$LC\dfrac{d^2v_c}{dt^2}+\dfrac{L}{R}\dfrac{dv_c}{dt}+v_c=v$が得られる．さらに，$v_R=v_c$であるから，伝達関数は次の式から求まる．

$$LCs^2H(s)+\frac{L}{R}sH(s)+H(s)=1$$

$$H(s)=\frac{1}{LCs^2+\dfrac{L}{R}s+1}=\frac{R}{LCRs^2+Ls+R}$$

(1)と同様に伝達関数の極を求めると $s=\dfrac{-L\pm\sqrt{L^2\text{-}4LCR^2}}{2LCR}$ であり，L, C, R はいずれも正であるから，極の実部は負となる．すなわち，この応答は安定である．

［解答 13.2］

(1) 入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s}$ であるから，応答 $g(t)$ のラプラス変換は次のように求まる．

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)s}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)$$

これをラプラス逆変換して，応答は次のように求まる．

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)u(t)$$

(2) 入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$ であるから，応答 $g(t)$ のラプラス変換は次のように求まる．

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)s^2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}\right)$$

これをラプラス逆変換して，応答は次のように求まる．

$$g(t)=\frac{1}{4}\left(-1+2t+e^{-2t}\right)u(t)$$

(3) 入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$ であるから，応答 $g(t)$ のラプラス変換は次のように求まる．

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)(s^2+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{-s+2}{s^2+1}+\frac{1}{s+2}\right)$$

これをラプラス逆変換して，応答は次のように求まる．

$$g(t)=\frac{1}{5}\left(2\sin t-\cos t+e^{-2t}\right)u(t)$$

［解答 13.3］

入力 $f_i(t)$ と応答 $y_i(t)$ のラプラス変換を $F_i(s)$，$Y_i(s)$ とすると

$$Y_i(s)=\frac{A_i}{\tau_i s+1}F_i(s)$$

なる関係がある．

(1) インパルス応答は，入力としてデルタ関数 $F_i(s)=1$ を加えた場合の応答であるから

$$H_i(s)=\frac{A_i}{\tau_i s+1}=\frac{A_i}{\tau_i}\frac{1}{s+\dfrac{1}{\tau_i}}$$

をラプラス逆変換して，次のようにインパルス応答を得る．

$$h_i(t)=\frac{A_i}{\tau_i}e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

(2) 階段関数のラプラス変換は $F_i(s)=\dfrac{1}{s}$ であるから

$$Y_i(s)=\frac{A_i}{\tau_i s+1}\frac{1}{s}=A_i\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{\tau_i}}\right)$$

ラプラス逆変換して，次の応答を得る．

$$g_i(t)=A_i\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right)u(t)$$

(3) システム S の伝達関数は

$$H(s)=\frac{A_1}{\tau_1 s+1}\frac{A_2}{\tau_2 s+1}=\frac{A_2}{\tau_2 s+1}\frac{A_1}{\tau_1 s+1}$$

となり，いずれの接続でも等しくなる．

(4) 応答 $g(t)$ のラプラス変換は次のように求まる．

(i) $\tau_1\neq\tau_2$ のとき，

$$G(s)=\frac{A_1}{\tau_1 s+1}\frac{A_2}{\tau_2 s+1}\frac{1}{s}=A_1A_2\left(\frac{1}{s}+\frac{\dfrac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}}{s+\dfrac{1}{\tau_2}}-\frac{\dfrac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}}{s+\dfrac{1}{\tau_1}}\right)$$

となるから，これをラプラス逆変換して

$$g(t) = A_1 A_2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) u(t)$$

$$= A_1 A_2 \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}} e^{-\frac{t}{\tau_i}} - \frac{1}{1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) u(t)$$

(ii) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ のとき，

$$G(s) = \frac{A_1 A_2}{(\tau s + 1)^2} \frac{1}{s} = A_1 A_2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} - \frac{1}{\tau \left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2} \right)$$

となるから，これをラプラス逆変換して

$$g(t) = A_1 A_2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$