章末の演習問題の解答

1 章の演習の解答

演習 1.1　工場 F_i から店舗 S_j へ輸送する量を $x_{i,j}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && 10x_{1,1}+6x_{1,2}+15x_{1,3}+11x_{2,1}+8x_{2,2}+10x_{2,3} \ \to\ \text{最小化}\\
&\text{制約条件：} && x_{1,1}+x_{2,1}=120\\
& && x_{1,2}+x_{2,2}=50\\
& && x_{1,3}+x_{2,3}=80\\
& && x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3}=90\\
& && x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3}=160\\
& && x_{1,1},x_{1,2},\ldots,x_{2,3}\geq 0
\end{aligned}
$$

演習 1.2　工場 F_i から店舗 S_j へ輸送する量を $x_{i,j}$ とすると，目的関数は

$$C_{1,1}(x_{1,1})x_{1,1}+C_{1,2}(x_{1,2})x_{1,2}+C_{1,3}(x_{1,3})x_{1,3}+C_{2,1}(x_{2,1})x_{2,1}+C_{2,2}(x_{2,2})x_{2,2}+C_{2,3}(x_{2,3})x_{2,3}$$

となり，$C_{i,j}$ が定数関数ではないことから，非線形計画問題となる．

2 章の演習の解答

演習 2.1　目的関数を最小化とし，制約条件の 2 つの不等式を等式とするためにスラック変数 x_4,x_5 を導入すると，以下のとおり．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && -2x_1-3x_2-x_3 \ \to\ \text{最小化}\\
&\text{制約条件：} && 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=20\\
& && x_1+3x_2-x_5=35\\
& && x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geq 0
\end{aligned}
$$

演習 2.2　変数の数は $n=6$．係数行列 $\mathbf{A}$ は 6×5 の行列だが，線形従属のため $\mathrm{rank}(\mathbf{A})=4$．したがって $m=4$．基底解は n 個の変数のうち $n-m$ 個の非基底変数が 0 となる解であるから，${}_6C_2=15$ 個の基底解が存在する．

4 章の演習の解答

演習 4.1

1. 人為変数 x_4, x_5 を導入する．

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && w = x_4 + x_5 \ \rightarrow \ \text{最小化} \\
&\text{制約条件：} && 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\
& && 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

（目的関数は，人為変数の和になることに注意.）

2. 人為変数のシンプレックスタブローは次のとおり．

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	6
	2	3	2	0	1	10

まず，これを基底形式にする．

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-4	-4	-3	0	0	-16
x_4	2	1	1	1	0	6
x_5	2	3	2	0	1	10

あとは，シンプレックス法に従う．（以降，ピボット要素に*をつけている.）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	$\underline{-4}$	-4	-3	0	0	-16
x_4	2^*	1	1	1	0	6
x_5	2	3	2	0	1	10

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	$\underline{-2}$	-1	2	0	-4
x_4	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	3
x_5	0	2^*	1	-1	1	4

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	$1/4$	$3/4$	$-1/4$	2
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	2

目的関数を 0 にでき，人為変数はすべて非基底変数である．そこで，元の問題の初期基底形式は，

	x_1	x_2	x_3	
$-z$	3	2	0	0
x_1	1	0	$1/4$	2
x_2	0	1	$1/2$	2

から

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-z & 0 & 0 & -7/4 & -10 \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 1/4 & 2 \\
x_2 & 0 & 1 & 1/2 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

と求めることができる．

3.

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-z & 0 & 0 & \underline{-7/4} & -10 \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 1/4 & 2 \\
x_2 & 0 & 1 & 1/2^{*} & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
-z & 0 & 7/2 & 0 & -3 \\
\hline
x_1 & 1 & -1/4 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 2 & 1 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

これより，最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 4)$，目的関数の最小値は 3.

演習 **4.2**

1.

目的関数： $3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件： $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$

2.

目的関数： $x_5 + x_6 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件： $2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 6$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$

3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
	2	1	-1	0	1	0	2
	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	$\underline{-6}$	-4	1	1	0	0	-8
x_5	2^*	1	-1	0	1	0	2
x_6	4	3	0	-1	0	1	6

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	-1	-2	1	3	0	-2
x_1	1	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	0	1
x_6	0	1	2^*	-1	-2	1	2

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-w$	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	$3/4$	0	$-1/4$	0	$1/4$	$3/2$
x_3	0	$1/2$	1	$-1/2$	-1	$1/2$	1

$w = 0$ とできたので，人為変数を削除し，目的関数を入れ替える．

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	3	2	0	0	0
	1	$3/4$	0	$-1/4$	$3/2$
	0	$1/2$	1	$-1/2$	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	$\underline{-1/4}$	0	$3/4$	$-9/2$
	1	$3/4$	0	$-1/4$	$3/2$
	0	$1/2$	1	$-1/2$	1

これが初期基底形式となる．

4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	$\underline{-1/4}$	0	$3/4$	$-9/2$
	1	$3/4$	0	$-1/4$	$3/2$
	0	$1/2$	1	$-1/2$	1

$\rightarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$1/3$	0	0	$2/3$	-4
	$3/4$	1	0	$-1/3$	2
	$-3/8$	0	1	$-1/3$	0

標準形の問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$，目的関数の最小値は 4.

5. 与えられた問題の最適解は，スラック変数を除いた $(x_1, x_2) = (0, 2)$ であり，目的関数の最小値は 4.

演習 4.3　与えられた問題は，標準形をしているが，基底形式ではない．このため，人為変数 x_4, x_5 を導入した補助問題を作成し，シンプレックス法で解く．

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	0	0	1	1	0
	2	1	1	1	0	10
	2	3	2	0	1	6

$\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	-4	-4	-3	0	0	-16
x_4	2	1	1	1	0	10
x_5	2	3	2	0	1	6

$\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	2	1	0	2	-4
x_4	0	-2	-1	1	-1	4
x_1	1	3/2	1	0	1/2	3

最適解が求まったが，目的関数の最小値は 4 であり，0 とすることができない．したがって，与えられた問題には実行可能解が存在しない．

5 章の演習の解答

演習 5.1　P_1 は，次の標準形の問題と等価である．

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数：} & -z = (-\mathbf{c})^T\mathbf{x} \ \rightarrow\ \text{最小化} \\
\text{制約条件：} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

したがって，P_1 の双対問題 D_1 は以下のとおり．

$$
P_1 \left\{
\begin{array}{ll}
\text{目的関数：} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \ \rightarrow\ \text{最大化} \\
\text{制約条件：} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq -\mathbf{c}
\end{array}
\right.
$$

P_2 は，次の標準形の問題と等価である．

$$\text{目的関数：}\quad -z = \left[\ \mathbf{c}^T \ \middle|\ 0 \cdots 0 \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \text{—} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} \ \rightarrow \ \text{最小化}$$

$$\text{制約条件：}\quad \left[\ \mathbf{A} \ \middle|\ \mathbf{E}\ \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \text{—} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x},\ \mathbf{x}' \geq \mathbf{0}$$

したがって，P_2 の双対問題は以下のようになる．

$$\text{目的関数：}\quad \mathbf{b}^T\mathbf{y} \ \rightarrow \ \text{最大化}$$

$$\text{制約条件：}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \text{—} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{y} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \text{—} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

制約条件を見やすく書き換えると次のようになる．

$$D_2 \begin{cases} \text{目的関数：} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \ \rightarrow \ \text{最大化} \\ \text{制約条件：} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \leq \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{y}$ の符号を入れ替えれば次のようにも書ける．

$$D_2' \begin{cases} \text{目的関数：} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \ \rightarrow \ \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

6 章の演習の解答

演習 6.1　ダイクストラ法を適用すると，次の表のとおり．

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
∞	∞	∞	∞	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
∞	5(E)	∞	∞		∞	$\underline{3}$(E)	7(E)	∞	∞
∞	$\underline{5}$(E)	∞	9(G)		7(G)		7(E)	∞	∞
10(B)		∞	8(B)		$\underline{7}$(G)		7(E)	∞	∞
10(B)		14(F)	8(B)				$\underline{7}$(E)	15(F)	∞
10(B)		14(F)	$\underline{8}$(B)					15(F)	12(H)
$\underline{10}$(B)		13(D)						15(F)	12(H)
		$\underline{12}$(A)						15(F)	12(H)
								15(F)	$\underline{12}$(H)
								14(J)	

これより，節点 E から最も遠いのは節点 I で，E から I への最短路は $(E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow I)$ である．

演習 6.2　ある繰り返しで選択された節点 $\hat{i}$ に対して，S に含まれない節点を経由した経路 R' を考えたとき，

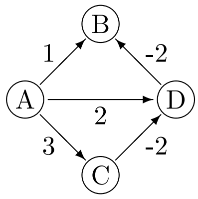
$$[R'\text{の長さ}] = d(j) + [j \text{ から } \hat{i} \text{ までの長さ}]$$

となる．負の長さの枝が存在すると仮定すると，j から $\hat{i}$ までの長さが負になる可能性もある．この場合，

$$[R'\text{の長さ}] < d(j) = [R \text{ の長さ}]$$

となり，すでに得られている経路 R が最短路であることを導くことができない．したがって，ダイクストラ法の正当性を保証することができない．

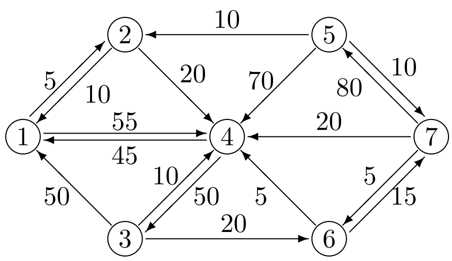
ダイクストラ法が正しく働かない簡単な例を下に挙げておく．



7 章の演習の解答

演習 7.1

(1) 残余ネットワークは下図のとおり．



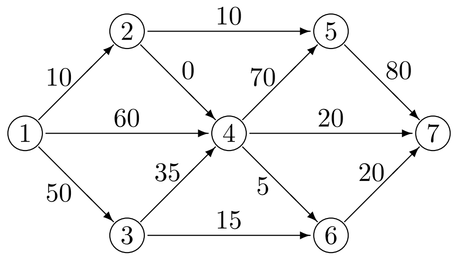
(2) ラベリング法を用いる．

1	2	3	4	5	6	7
$\underline{*}$	*	*	*	*	*	*
	$\underline{1}$	*	1	*	*	*
		*	$\underline{1}$	*	*	*
		$\underline{4}$		*	*	*
				*	$\underline{3}$	*
				*		6

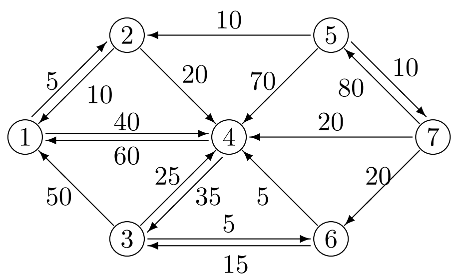
これより，増加路 $(1 \to 4 \to 3 \to 6 \to 7)$ が得られる．増加路上の残余容量の最小値は 15．したがって，追加できる流量は 15 である．

(3) ソース（節点 1）とシンク（節点 7）以外に節点が 5 つある．カット (S, T) に対して，S に含まれる節点の選び方は 2^5 通りであるから，カットは $2^5 = 32$ 種類ある．

(4) (2) で求めたフロー増加路にしたがってフローを追加すると，下のフローが得られる．流量は 120.



さらに，このフローに対する残余ネットワークを作成すると，下図が得られる．

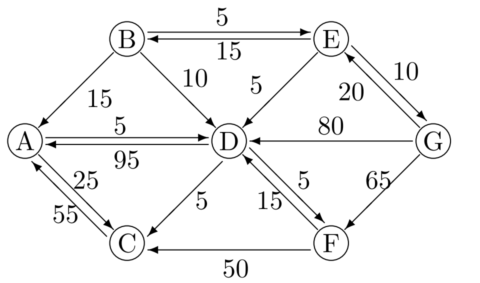


この残余ネットワークにラベリング法を適用すると，フロー増加路が存在しないことがわかり，特に，ソースから到達可能な節点の集合は $S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ である．$T = V \setminus S = \{5, 7\}$ とすると，カット (S, T) のカット容量は 120 となる．最大流最小カット定理より，最小カット容量を与えるカットは $(S = \{1, 2, 3, 4, 6\}, T = \{6, 7\})$，カット容量は 120 である．

（32 種類のカットについてカット容量を調べる必要はない．）

演習 7.2

(1) 「残余ネットワーク」を用いた証明：図 (a) のネットワークに図 (b) のフローを流したときの残余ネットワークを求めると，下図となる．



これにラベリング法を用いる．

A	B	C	D	E	F	G
$\underline{*}$	*	*	*	*	*	*
	*	$\underline{\text{A}}$	A	*	*	*
	*		$\underline{\text{A}}$	*	*	*
	*			*	$\underline{\text{D}}$	*
	*			*		*

残余ネットワークにフロー増加路が存在しないため，与えられたフローが最大流である．

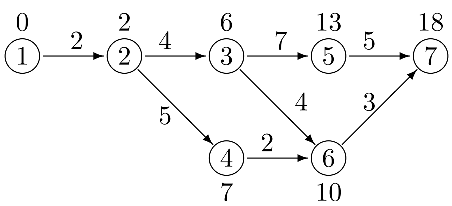
(2) 「カット」カット $(S_0, T_0) = (\{A, C, D, f\}, \{B, E, G\})$ のカット容量は，$u_{A,B} + u_{D,E} + u_{D,G} + u_{F,G} = 165$ である．これは，与えられたフローの流量 165 と等しい．

流量と等しいカット容量を持つカットが存在するため，最大流最小カット定理より，与えられたフローは最大流である．

9 章の演習の解答

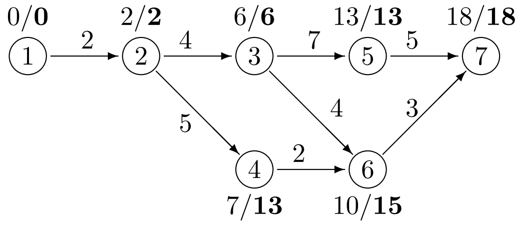
演習 9.1

1. 最早開始時刻を順に求めると，下図のとおり．



これより，プロジェクトの所要時間は 18．

2. プロジェクト終了点から逆順に最遅終了時刻を求めると，下図の太字のとおり．



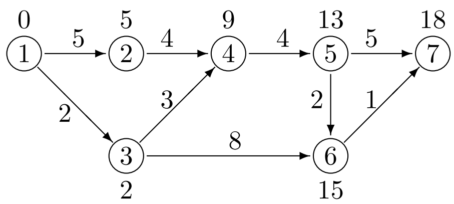
最遅終了時刻と最早開始時刻，各作業の所要時間から，作業 $A_{i,j}$ に許される全余裕は以下のとおり．

$$
\begin{aligned}
\text{作業 } A_{1,2} &\quad : \quad 2-0-2=0\\
\text{作業 } A_{2,3} &\quad : \quad 6-2-4=0\\
\text{作業 } A_{2,4} &\quad : \quad 13-2-5=6\\
\text{作業 } A_{3,5} &\quad : \quad 13-6-7=0\\
\text{作業 } A_{3,6} &\quad : \quad 15-6-4=5\\
\text{作業 } A_{4,6} &\quad : \quad 15-7-2=6\\
\text{作業 } A_{5,7} &\quad : \quad 18-13-5=0\\
\text{作業 } A_{6,7} &\quad : \quad 18-10-3=5
\end{aligned}
$$

（全余裕は，その作業だけを延長する場合に許される余裕時間.）

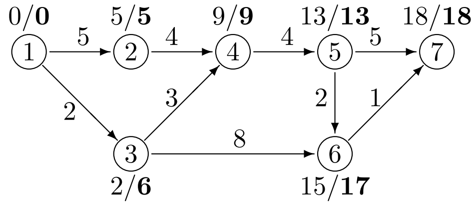
演習 9.2

1. 最早開始時刻を順に求めると，下図の太字のとおり．



2. クリティカルパスは $(1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 7)$ であるので，延長が許されない作業は $A_{1,2}$，$A_{2,4}$，$A_{4,5}$，$A_{5,7}$ の 4 つ．

3. 最遅終了時刻を求めると下図のとおり．



クリティカルパス上にない作業について，それぞれ全余裕を計算する．

$$
\begin{aligned}
\text{作業 } A_{1,3} &\ :\ 6-0-2=4\\
\text{作業 } A_{3,4} &\ :\ 9-2-3=4\\
\text{作業 } A_{3,6} &\ :\ 17-2-8=7\\
\text{作業 } A_{5,6} &\ :\ 17-13-2=2\\
\text{作業 } A_{6,7} &\ :\ 18-15-1=2
\end{aligned}
$$

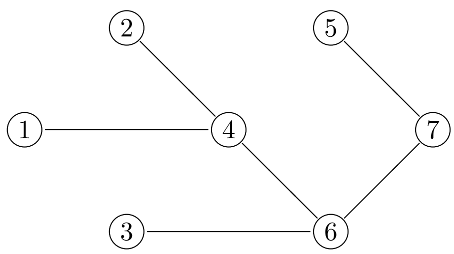
よって，最も長く延長が許される作業は $A_{3,6}$ で，延長日数は 7 日．

10 章の演習の解答

演習 10.1

1. 節点数が 7 のグラフであるから，スパニングツリーには 6 本の枝が含まれる．

2. クラスカル法を用いると，下図が最小木として得られる．



演習 10.2

1. 目的関数における各 x_i の係数 c_i と，制約条件における各 x_i の係数 a_i について，それぞれ c_i/a_i を計算すると，

$$c_1/a_1 > c_2/a_2 > c_3/a_3 > c_5/a_5 > c_4/a_4$$

である．したがって，x_1, x_2, x_3, x_5, x_4 の順に値を決定すればよい．

2. 上記の順に，制約条件を満たす限り $x_i = 1$ とすることで，$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_5 = 1, x_4 = 0$ と決定できる．したがって，近似解は $(1, 1, 0, 0, 1)$，その解における目的関数値は 20．

11 章の演習の解答

演習 11.1

1. 目的関数における各 x_i の係数 c_i と，制約条件における各 x_i の係数 a_i について，それぞれ c_i/a_i を計算すると，

$$c_1/a_1 > c_2/a_2 > c_3/a_3 > c_4/a_4 > c_5/a_5 > c_6/a_6$$

となっているため，$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ の順に値を決定すると，$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$ が得られる．したがって，近似解は $(1, 1, 1, 0, 1, 0)$，その解における目的関数値は 23.

2. 問題 P_1' を定式化すると以下のとおり．

$$\begin{aligned}
\text{目的関数} \quad &: \quad 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 6x_6 \to \ \text{最大化} \\
\text{制約条件} \quad &: \quad x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 8x_6 \leq 14 \\
& \quad\;\; 0 \leq x_i \leq 1 \ (2 \leq i \leq 6)
\end{aligned}$$

3. 欲張り法を用いると $x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 1/2$ が得られる．よって，P_1' の最適解は $(1, 1, 1, 1, 1/2)$ で，目的関数の最大値は 20.

4. P_1 は，P_0 において $x_1 = 0$ としたときの部分問題である．前問より，P_1 における目的関数の最大値は 20 より大きくはなることはなく，すでに目的関数値 23 を与える近似解 $(1, 1, 1, 0, 1, 0)$ が求まっているため，P_0 の最適解において $x_1 = 0$ となることはない．したがって $\tilde{x}_1 = 1$ である．

13 章の演習の解答

演習 13.1　目的関数：

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_3$$

の勾配およびヘッセ行列は

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 10x_2 \\ 2x_3 - 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である．ヘッセ行列の固有値を計算すると，$1, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$ であり，全て正．よって正定値である．また，ヘッセ行列の逆行列は

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

である．

初期近似解 $\mathbf{x}^{(1)}=(5,-4,3)^T$ に対してニュートン法を適用すると，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} &= -\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(1)})^{-1}\nabla f(\mathbf{x}^1) \\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\times 5+2\times(-4) \\ 2\times 5+10\times(-4) \\ 2\times 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

ここで，新しい近似解 $\mathbf{x}^{(2)}$ における勾配を計算すると，

$$
\nabla f(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 4\times 0+2\times 0 \\ 2\times 0+10\times 0 \\ 2\times 2-4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
$$

となり，$\mathbf{x}^{(2)}$ が最適解である．(1 回の繰り返しで最適解が求まった．)

演習 **13.2**

1. $f(x,y)=xy$ より，勾配 $\nabla f(x,y)$ とヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y)$ は以下のとおり．

$$
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

2. 固有値を λ とすると $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ の行列式が 0 なので，

$$
\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.
$$

負の値の固有値があるため，正定値でも半正定値でもない．

3. ヘッセ行列の逆行列は，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるから，$\mathbf{x}^{(t)} = (1,1)^T$ を代入すると

$$
\mathbf{d} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

である．これは，最急降下法における近似解の移動方向である $-\nabla f(\mathbf{x}^{(t)}) = (-1,-1)^T$ と等しい．(この場合は，ニュートン法によってより良い近似解を得ることができる．)

一方，$\mathbf{x}^{(t)} = (1, -1)^T$ の場合，

$$\mathbf{d} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり，最急降下法における近似解の移動方向である $-\nabla f(\mathbf{x}^{(t)}) = (-1, 1)^T$ と逆の方向を向いている．（したがって，この場合はニュートン法を適用すると，目的関数は増大してしまう．）

14 章の演習の解答

演習 14.1

1. $\mathbf{x}^*$ が最適解であるための必要条件は，

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} & g(\mathbf{x}^*) < 0 \text{ のとき} \\ \nabla f(\mathbf{x}^*) + u\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \text{ を満たす } u \geq 0 \text{ が存在} & g(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

（不等式制約条件が 1 つの場合のキューン・タッカー条件）

2. (a) f の勾配は

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 2) \\ 2(x_3 - 3) \end{pmatrix}$$

である．$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}$ を満たす点（解）は $(1, 2, 3)$ であり，$g(1, 2, 3) = 1 + 2 + 3 - 30 = -24 < 0$ より制約条件を満たす．したがって，最適解は $(1, 2, 3)$ である．

(b) f の勾配は

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 2) \\ 2(x_3 - 3) \end{pmatrix}$$

である．$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}$ を満たす点（解）は $(1, 2, 3)$ であり，$g(1, 2, 3) = 1 + 2 + 3 + 30 = 36 > 0$ より制約条件を満たさない．したがって，最適解 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) は境界上にある．

$$\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より，ある非負の実数 u が存在して

$$\nabla g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) + u\nabla g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \begin{pmatrix} 2(x_1^* - 1) + u \\ 2(x_2^* - 2) + u \\ 2(x_3^* - 3) + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = 1 - u/2, \quad x_2^* = 2 - u/2, \quad x_3^* = 3 - u/2$$

が成立．また，(x_1^*, x_2^*, x_3^*) は $g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$ を満たすため，

$$\begin{aligned}
g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= (1 - u/2) + (2 - u/2) + (3 - u/2) + 30 = 0 \\
u &= 24(\geq 0) \\
x_1^* &= 1 - 24/2 = -11 \\
x_2^* &= 2 - 24/2 = -10 \\
x_3^* &= 3 - 24/2 = -9
\end{aligned}$$

よって，最適解は $(-11, -10, -9)$．

(c) f の勾配は

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 2) \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり，$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}$ を満たす点（解）は存在しない．したがって，最適解 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) は境界上にある．

$$\nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より，ある非負の実数 u に対して

$$\nabla g(x_1, x_2, x_3) + u \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2(x_1^* - 1) + u \\ 2(x_2^* - 2) + u \\ -1 + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立．よって $u = 1(\geq 0), x_1^* = 1/2, x_2^* = 3/2$．また，$(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ は $g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$ を満たすため，

$$\begin{aligned}
g(x_1^*, x_2^*, x_3^*) &= 1/2 + 3/2 + x_3^* - 30 = 0 \\
x_3^* &= 28
\end{aligned}$$

よって，最適解は $(1/2, 3/2, 28)$．

演習 14.2　まず，境界上ではない解について考える．

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -e^{-x_1} \\ -e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

より，$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ となる $\mathbf{x}$ は存在しない．したがって，最適解は境界上にある．

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より
$$\nabla f(\mathbf{x}) + u\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -e^{-x_1} + u \\ -e^{-x_2} + 3u \end{pmatrix}.$$
これが $\mathbf{0}$ と等しいためには
$$x_1 = -\log u, \quad x_2 = \log 3u$$
であり，境界上であることから
$$g(\mathbf{x}) = -\log u - 3\log 3u = 4$$
を満たす.（対数の底は自然対数の e.）これを u について解くと，
$$u = \pm 3^{-3/4}e^{-1}$$
であるが，$u > 0$ より $u = 3^{-3/4}e^{-1}$. したがって
$$x_1 = -\log(3^{-3/4}e^{-1}) = \frac{3}{4}\log 3 + 1,$$
$$x_2 = -\log(33^{-3/4}e^{-1}) = -\frac{1}{4}\log 3 + 1.$$
凸計画問題であるから，$\mathbf{x} = (\frac{3}{4}\log 3 + 1, -\frac{1}{4}\log 3 + 1)$ が最適解である.