

章末以外の演習問題（練習）の解答

2章の練習の解答

練習 2.1

$$\text{目的関数: } -x_1 - 2x_2 - x'_3 + x''_3 \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件: } x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$-x_1 + x'_3 - x''_3 - x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(スラック変数 x_4, x_5 を追加し、目的関数の符号を反転させて最小化とし、 $x_3 = x'_3 - x''_3$ とすることで全ての変数に非負条件をつける.)

練習 2.2 5変数のうち3変数を0とする. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ のとき制約条件から $x_4 = 10, x_5 = 12$ と求まる. したがってこの基底解は $(0, 0, 0, 10, 12)$. 同様にして ${}_5C_3 = 10$ 個の基底解を求めることができる.

$$(0, 0, 0, 10, 12), (0, 0, 10, 0, -18), (0, 0, 4, 6, 0), (0, 10, 0, 0, -8), (0, 6, 0, 4, 0), \\ (0, 18, -8, 0, 0), (10, 0, 0, 0, 2), (12, 0, 0, -2, 0), (9, 0, 1, 0, 0), (8, 2, 0, 0, 0)$$

このうち実行可能基底解は、非負条件を満たす6個であり、それぞれの目的関数を計算すると、

$$f(0, 0, 0, 10, 12) = 0$$

$$f(0, 0, 4, 6, 0) = -4$$

$$f(0, 6, 0, 4, 0) = -18$$

$$f(10, 0, 0, 0, 2) = -20$$

$$f(9, 0, 1, 0, 0) = -21$$

$$f(8, 2, 0, 0, 0) = -22$$

となる、したがって最適解は $(8, 2, 0, 0, 0)$ で、目的関数の最小値は -22 .

3章の練習の解答

練習 3.1 制約条件は、基底変数 x_4, x_5 を非基底変数で表す式となっており、

$$x_4 = 4 - (2x_1 + x_2 - 4x_3)$$

$$x_5 = 11 - (x_1 - 3x_2 - 2x_3)$$

である。これを目的関数に代入すると、

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2(4 - (2x_1 + x_2 - 4x_3)) - (11 - (x_1 - 3x_2 - 2x_3)) \\ &= -3 + x_1 + x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

となる。したがって、基底形式は以下のとおり。

$$\text{目的関数: } z = -3 + x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \text{最小化}$$

$$\text{制約条件: } 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 11$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

基底解は $(0, 0, 0, 4, 11)$ 、この解における目的関数値は -3 。

目的関数における非基底変数の係数が全て非負であり、いずれかの非基底変数を 0 から大きくすると、目的関数は大きくなる。よって、この基底解が最適解である。

練習 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	$-1/2$	0	0	$1/2$	4
x_3	2^*	0	1	-1	4
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	4

$$\rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	$1/4$	$1/4$	5
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
x_2	0	1	$-1/4$	$3/4$	3

係数が全て非負になったので終了。

最適解 $(2, 3, 0, 0)$ 、目的関数の最小値は -5 。

練習 3.3 はじめに x_1 の列をピボット列として選択する.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	<u>-1</u>	-1	0	0	0
x_3	3*	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	<u>-1/3</u>	1/3	0	4
x_1	1	2/3	1/3	0	4
x_4	0	4/3*	-1/3	1	4

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	1/4	1/4	5
x_1	1	0	1/2	-1/2	2
x_2	0	1	-1/4	3/4	3

係数が全て非負になったので終了. 最適解 $(2, 3, 0, 0)$, 目的関数の最小値は -5 .

(前問の答えと同じ最適解が得られた.)

練習 3.4 ピボット操作を行うと,

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	<u>-3</u>	-2	0	0	0
x_3	2*	1	1	0	6
x_4	1	2	0	1	6

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	<u>-1/2</u>	3/2	0	9
x_1	1	1/2	1/2	0	3
x_4	0	3/2*	-1/2	1	3

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$-z$	0	0	4/3	1/3	10
x_1	1	0	2/3	-1/3	2
x_2	0	1	-1/3	2/3	2

となる. (ピボット列や行の選択方法は複数あり, これは一例.) 係数が全て非負になったので終了. 最適解 $(2, 2, 0, 0)$, 目的関数の最小値は -10 .

練習 3.5 ピボット操作を行うと,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	-6	<u>-10</u>	-3	0	0	0	0
x_4	4	8*	1	1	0	0	0
x_5	-1	3	2	0	1	0	3
x_6	0	1	0	0	0	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	-1	0	<u>-7/4</u>	5/4	0	0	0
x_1	1/2	1	1/8*	1/8	0	0	0
x_5	-5/2	0	13/8	-3/8	1	0	3
x_6	-1/2	0	-1/8	1/8	0	1	1

→

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z$	6	14	0	3	0	0	0
x_4	4	8	1	1	0	0	0
x_5	-9	-13	0	-2	1	0	3
x_6	0	1	0	0	0	1	1

のようになる。(ピボット列や行の選択方法は複数あり, これは一例.) 基底変数は (x_4, x_5, x_6) から (x_1, x_5, x_6) , (x_2, x_5, x_6) と変化しているが, 目的関数 z の値は, 改善されず 0 のままである.

5章の練習の答え

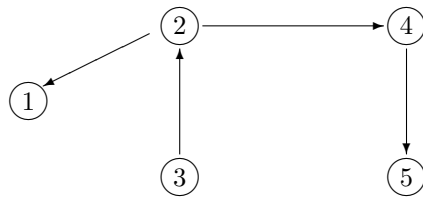
練習 5.1 双対問題における最適解を $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2, \bar{y}'_3)$ とする. 店舗 S_j への輸送量を δ だけ増加させるとコストは $\delta \bar{y}'_j$ だけ増加する. したがって, 輸送コスト最小化の観点においては, \bar{y}'_j が最小となる店舗 S_j への輸送量を増やすのが最適である.

6章の練習の答え

練習 6.1 ダイクストラ法を適用すると, 次の表のとおり.

	1	2	3	4	5
	∞	∞	<u>0</u>	∞	∞
4(3)		<u>2</u> (3)		∞	10(3)
<u>3</u> (2)				8(2)	10(3)
				<u>8</u> (2)	10(3)
					9(4)

これより, 最短路木は下図となる.



練習 6.2 ダイクストラ法を与えられたネットワークに適用すると、次の表のとおり.

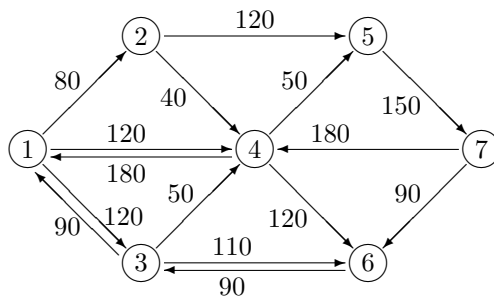
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	5(A)	<u>3</u> (A)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	<u>5</u> (A)		5(C)	∞	12(C)	∞	∞	∞	∞
			<u>5</u> (C)	12(B)	12(C)	∞	∞	∞	∞
				12(B)	<u>11</u> (D)	14(D)	∞	∞	∞
				<u>12</u> (B)		14(D)	∞	14(F)	∞
						<u>13</u> (E)	16(E)	14(F)	∞
							16(E)	<u>14</u> (F)	∞
							<u>16</u> (E)		22(I)
									<u>21</u> (H)

したがって、A から J への最短経路は $(A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J)$ である.

7章の練習の答え

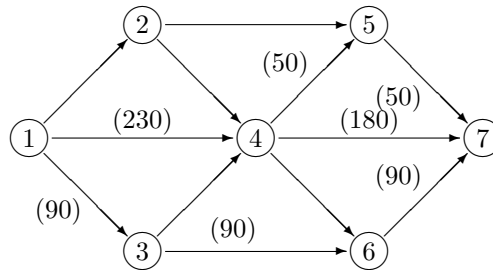
練習 7.1

(1) 残余ネットワークは下図のとおり.



(2) 残余ネットワークにはソースからシンクへのパスとして、 $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7)$ や $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7)$ などがある. たとえばフロー増加路として

(1 → 4 → 5 → 7) を考えると、このパス上の残余容量の最小値は 50. 流量が増加したフローは下図のとおり.

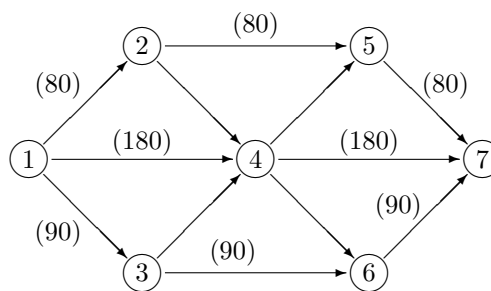


練習 7.2 (1) で得られた残余ネットワークにラベリング法を適用する.

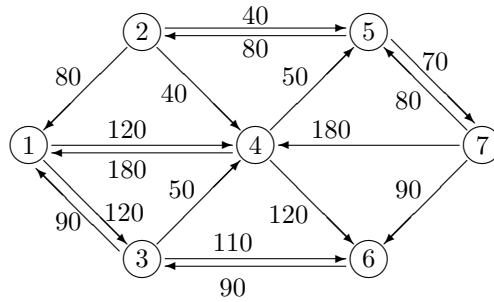
1	2	3	4	5	6	7
*	*	*	*	*	*	*
-						
	<u>1</u>	1	1	*	*	*
		<u>1</u>	1	2	*	*
			<u>1</u>	2	3	*
				<u>2</u>	3	*
					3	5

シンクにラベルがついたので終了. 増加路として (1 → 2 → 5 → 7) が得られた.

練習 7.3 上で得られたフロー増加路上の残余容量の最小値は 80 であるから, ここへ 80 流す. 流量が増加したフローは下図のとおり.



これに対して残余ネットワークを作成する.

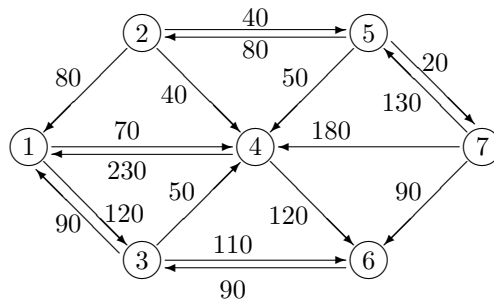


これに対してラベリング法を適用する.

1	2	3	4	5	6	7
*	*	*	*	*	*	*
		<u>1</u>	1	*	*	*
	*		<u>1</u>	*	3	*
	*			<u>4</u>	3	*
	5				3	5

シンクである7にラベルがついたので終了. フロー増加路として $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7)$ が得られた. 追加できる流量は $\min(120, 50, 70) = 50$.

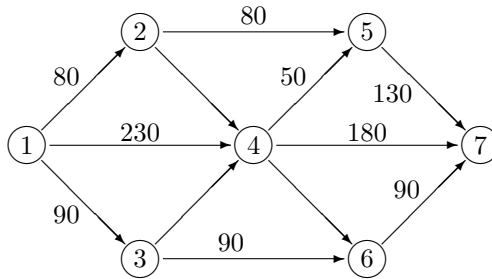
流量を追加し, その残余ネットワークをさらに作成すると下図になる.



ラベリング法を適用.

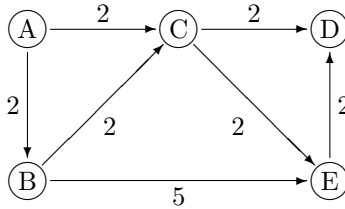
1	2	3	4	5	6	7
*	*	*	*	*	*	*
		<u>1</u>	1	*	*	*
	*		<u>1</u>	*	3	*
	*			*	<u>3</u>	*
	*			*		*

フロー増加路が存在しないことがわかったので, フロー増加法を終了. 最大流は下図のとおり.



8章の練習の答え

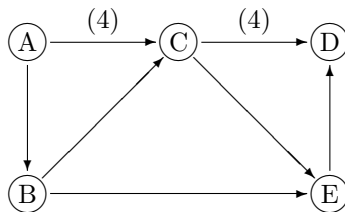
練習 8.1 コストを長さと考えよう。



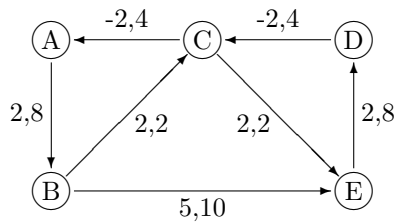
このネットワークに対して最短路を求めるには、ダイクストラ法を用いればよい。(ソースはA, シンクがDであることを注意.)

A	B	C	D	E
<u>0</u>	∞	∞	∞	∞
	<u>2(A)</u>	2(A)	∞	∞
		<u>2(A)</u>	∞	7(B)
			4(C)	4(C)
			<u>4(C)</u>	4(C)

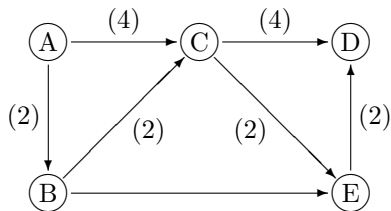
シンクDへの最短路(A → C → D)が求まった。このパス上の枝(A, C), (C, D)の容量は共に4であるから、ここへ4流すフローを作成する。



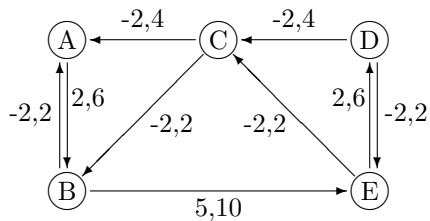
残余ネットワークは下図のとおり。(逆向きの枝のコストはマイナスとなることに注意.)



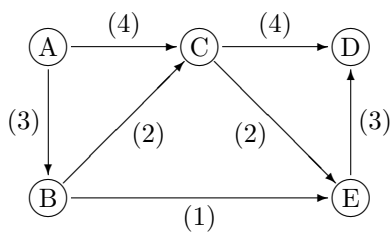
ここで、増加路は $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D)$ と $(A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D)$ のみで、コストはそれぞれ 8 と 9 である。そこで、コストが小さい $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D)$ へフローを増加する。増加できる流量は、 $\min(8, 2, 2, 8) = 2$ で、すでにある流量 4 に加えても必要流量を超えないため、流量は 2 増加させる。得られたフローは以下のとおり。



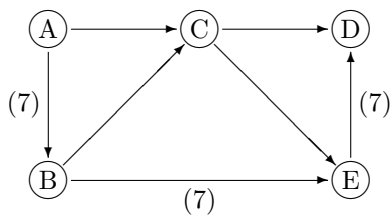
まだ流量が足りないため、残余ネットワークを作成する。



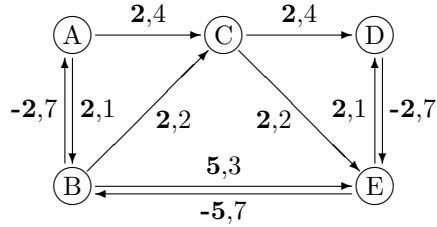
増加路は $(A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D)$ のみで、ここへ不足分の流量 1 を流す。最終的に得られた最小費用流は下図になる。



練習 8.2 まず、コストを考えずに流量を確保できるフローを考える。たとえば、下図のフローが考えられる。

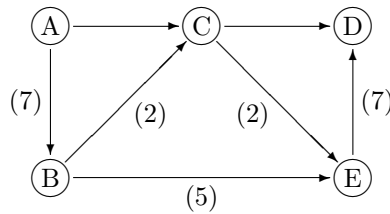


残余ネットワークを作成する。(ここでは、コストを太字で示している.)

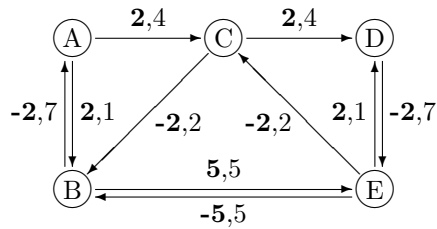


負の長さの枝 (E, B) を含む閉路 $(B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B)$ や $(A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A)$ は、負閉路になっていることがわかる。

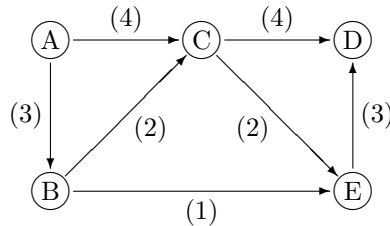
たとえば、閉路 $(B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B)$ にフローを追加することにし、閉路上の残余容量の最小値 $\min(2, 2, 7) = 2$ のフローを追加する。(全体の流量は変化しないことに注意.) 変更されたフローは次のとおり。(枝 (B, E) に流れる量が減っていることに注意.)



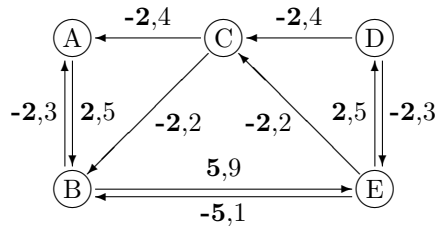
さらに残余ネットワークを作成する。



閉路 $(A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A)$ が負閉路として残っているため、ここへ $\min(4, 4, 7, 5, 7) = 4$ だけフローを追加する。



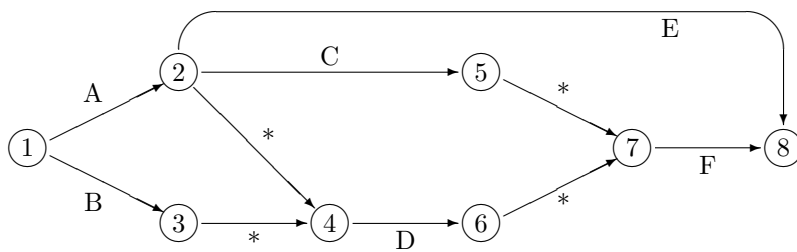
残余ネットワークは次の図のとおり。



この残余ネットワークには負閉路が存在しないため、先に得られたフローが最小費用流である。

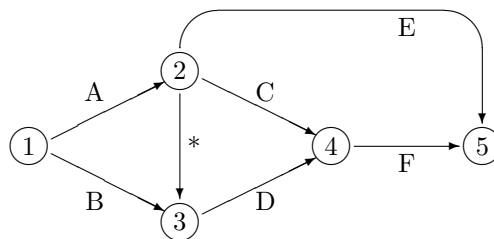
9章の練習の答え

練習 9.1 各作業の制約条件から、下図が得られる。

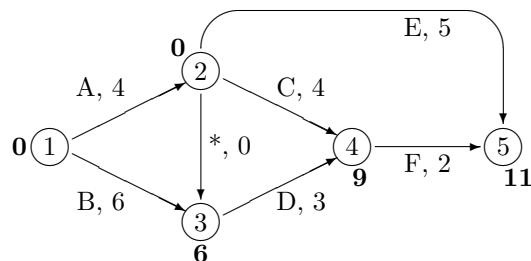


このままでもアロー・ダイヤグラムとしては成り立っているが、不要なダミー枝を削除する。

節点3に注目すると、ダミー枝(3,4)（と節点2）が削除できることがわかる。作業Bは、枝(1,4)となる。同様に、節点5とダミー枝(5,7)を削除して作業Cは枝(2,7)に、節点6とダミー枝(6,7)を削除して作業Dは枝(4,7)にできる。節点の番号を振り直せば、アロー・ダイヤグラムとして下図を得る。（ダミー枝(2,3)は削除できない。）

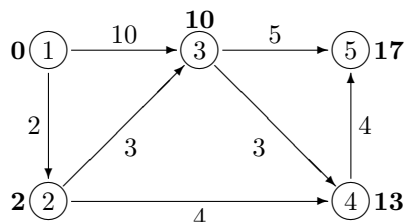


練習 9.2 所要日数を見ながら、節点1から順に最遅終了時刻を求めていく。

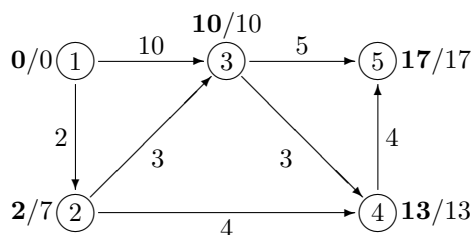


これより、プロジェクトの所要時間は11日。

練習 9.3 まず，最早開始時刻を求める．



次に，逆順に最遅終了時刻を求める．



これより，各作業に許される全余裕および自由余裕は次のように計算できる．
(枝 (i, j) に対応する作業を $A_{i,j}$ とした.)

作業	全余裕	自由余裕
$A_{1,2}$	$7 - 0 - 2 = 5$	$7 - 0 - 2 = 5$
$A_{1,3}$	0	0
$A_{2,3}$	$10 - 2 - 3 = 5$	$10 - 7 - 3 = 0$
$A_{2,4}$	$13 - 2 - 4 = 7$	$13 - 7 - 4 = 2$
$A_{3,4}$	0	0
$A_{3,5}$	$17 - 10 - 5 = 2$	$17 - 10 - 5 = 2$
$A_{4,5}$	0	0

クリティカルパス $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5)$ 上の作業については，全余裕，自由余裕ともに0である．

12章の練習の答え

練習 12.1 区間 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ の内点を

$$\mathbf{x}_0 = \frac{1}{\alpha} \mathbf{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{x}_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{x} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{x}'$$

とする．

$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_1)$ のとき, 狭められた区間を $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}')$ とすると

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}, \\ \hat{\mathbf{x}}' &= \mathbf{x}_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}'\end{aligned}$$

となる. したがって, 次の繰り返しにおいて選ばれる内点のうち $\hat{\mathbf{x}}_1$ は,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_1 &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\alpha}\hat{\mathbf{x}}' \\ &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha}\left(\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}'\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{x}'\end{aligned}$$

である. α が $\alpha^2 = \alpha + 1$ を満たすことから

$$1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$

が成り立つ. これより,

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{x}' = \frac{1}{\alpha^2}\mathbf{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0$$

となる. したがって, (Step 2) で $f(\hat{\mathbf{x}}_1)$ は計算する必要はなく, $f(\hat{\mathbf{x}}_1) = f(\mathbf{x}_0)$ とすればよい.

同様に, $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_1)$ のときには, $f(\hat{\mathbf{x}}_0) = f(\mathbf{x}_1)$ とすればよいことがわかる.

13章の練習の答え

練習 13.1

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2^3 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

より, 1次の必要条件は満たしている.

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, ヘッセ行列の固有値は 0 と 2 である. これは半正定値であるが正定値ではない. したがって, 2次の必要条件は満たしているが, 2次の十分条件は満たしていない. (このように, 最適解だからといって必ずしも十分条件は満たさない.)

練習 13.2

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、直前の場合と全く同様に、1次の必要条件、2次の必要条件是満たしているが、2次の十分条件は満たしていない。(しかし、この例の場合は目的関数値はいくらでも小さくすることができ、 \mathbf{x}^* は局所的最適解ではない。)